[苏]Ю. А. 德洛兹德　B.B.基里钦柯　著

有限维代数

刘绍学　张英伯　译

北京师范大学出版社

有 限 维 代 数

〔苏〕Ю. А. 德洛兹德
B. B. 基里钦柯 著

刘绍学 张英伯 译

北京师范大学出版社

有限维代数

〔苏〕Ю.А.ДРОЗД
В.В.КИРИЧЕНКО

刘绍学 张英伯 译

*

北京师范大学出版社出版
新华书店北京发行所发行
西安新华印刷厂印刷

*

开本：787×1092 1/32 印张：9 字数：186千
1984年8月第1版 1984年8月第1次印刷
印数：1—10,000
统一书号：13243·38 定价：1.20元

译 者 的 话

这是一本关于有限维结合代数的书，它不仅介绍了半单代数论的基础，也介绍了非半单代数论的基础．书中系统地使用了模论方法．在较具体的对象——有限维代数上学习近代代数方法，对初学者来说该是非常有益的，对于进一步学习近代有限维代数以及近代环论都是很有好处的．

这本薄薄的书涉及的内容还是较广泛和较深入的．叙证上很精练．作者说了该解释的话，虽然读者常需要补充一些推证和考虑一些细节．我们在赞赏细致叙证风格的同时也喜爱这种风格．它常能给细心的读者带来额外的收获和意外的愉快．

我们是怀着极大兴趣把这本苏联代数工作者的著作介绍给我国年青的代数爱好者的．

于北京师范大学

1983.2.6.

序　言

有限维代数的理论是近世代数最古老的分支之一。它的兴起首先要联系到Hamilton和Cayley的工作，前者提出了著名的四元数代数，后者对矩阵论进行了研究。以后，有许多数学家都来考察有限维代数的结构。在他们当中，应当提出的有：P.Peirce，K.C.Peirce，Clifford，Weierstrass，Dedekind，Jordan，Frobenius．十九世纪末，Ф.Молин，E.Cartan 描述了复数域和实数域上的半单代数，并对非半单代数进行了初步的探讨。

Wedderburn开创了有限维代数理论发展的新阶段，这一理论的基本结果都是他提出来的，这些结果包括：对任意域上半单代数的刻划，商代数关于根的提升定理等等。在以Noether，Artin，Brauer 为首的德国学派的代数学家的工作中，半单代数的理论取得了近代形式，并且其中大部分结果被移置到有极小条件的环（Artin环）上。此外，在这些工作当中，模（或表示）的概念发挥了主导作用。

有限维代数理论的进一步发展基本上沿着两个方向进行。一是建立无限维代数（以及没有链条件的环）的理论，这方面的结果集中体现在Jacobson“环的结构”一书中。另一个方向是研究非半单代数的结构，这一工作碰到了相当大的困难，其中大部分问题至今未能解决。因此，在这一领域当中，划分出一些“自然的”代数类并对它们进行描述，就

成了占据主要地位的工作。这一方向是从Köthe, Asano, Nakayama对主理想代数及其推广的研究开始的。

在全部历史进程中，有限维代数的理论与各个不同的数学分支有着紧密的联系，从它们当中汲取新的思想和方法，同时也对它们的发展产生了一些本质的影响。最初，这一理论与线性代数，群及其表示论，Galois理论的联系是最深远的，近来，特别由于对非半单代数的探讨，同调代数，范畴论，代数几何的方法开始表现出重要的作用。

本书的设想是作为有限维代数理论方面的现代教科书。在这本书中，模论（或表示论）的方法是基本的研究工具。我们认为，利用模论的方法能够最简单明确地达到目的，得出无论是经典的，还是现代的有关结果。自然，我们无法对有限维代数的各个方向都进行相同程度的阐述，因而在我们的书中，结构理论，即对代数结构的讨论占主要地位，而目前正处于高潮阶段的代数表示理论却几乎没有涉及。无疑地，专家们还会指出近期兴起的一些其它分支亦未能在本书中得到反映。尽管如此，我们仍然希望这本书为读者提供如下可能：一是便于掌握经典代数理论的基本结果，二是为了解近代研究成果作好充分的准备。

本书大部分内容所要求的预备知识在高等院校的高等代数和线性代数标准教学大纲内都有，大学二、三年级的学生完全能够掌握。此外，我们还假设读者不具备模论和环论方面的初步知识（不仅如此，“环”这个词在书中几乎没有出现）。当然，讨论群表示和Galois理论的章节要求读者了解群的基本理论（例如不超出А.И.Кострикин“代数学引论”的范围）。在每章的最后，附有复杂程度不等的习

题．这些习题当中，有一些是帮助消化课文内容的例子，也有一些是在基本课文中未能反映的理论片断．我们奉劝读者（特别是初学者），在第一次阅读时要多做练习，习题当中最困难的部分附有相当详细的提示．

全书的内容可以分成三大部分．第一部分由第一章到第三章组成，其中包括代数理论的基本概念，半单代数和根的经典定理．第三章的最后几节用于讨论代数的格式，可以认为是现代研究方法的引论．第二部分由第四章到第六章组成，可将它称之为“半单代数的精细理论”．这一部分基于张量积和双模的技巧叙述了中心单代数，Galois域论初步，Brauer群的概念和分离代数理论．最后，第三部分由第八章到第十章组成，用于讨论更现代的一些结果：关于模范畴等价性的Morita定理，拟Frobenius代数，单序列代数，继承和广义单序列代数的理论．这部分的某些结果该是只能在杂志的论文中才能找到．第七章有一些独特之处，在这一章中，根据已得的半单代数理论叙述了群表示论，直到整性定理和Burnside关于p^aq^b阶群的可解性定理．

自然，我们在任何地方都没有追求叙述和证明最一般性的结果，不仅如此，还处处利用了有限维的特点．按照我们的看法，这样可以使叙述简单化．有经验的读者会发现，书中的许多结论对于其它的代数系统，例如Artin环也是成立的，但是，如所周知，这种推广通常都几乎是自动完成的．而在一些不是这样的场合，则必将引起相当复杂的新考虑，在我们看来，这会给初学者阅读本书带来较大的困难．

我们没有给出关于有限维代数的文献的全面介绍，因为即使关于书中涉及的问题，其文献数量之大亦可与此书本身

页数相比。我们仅列出了一些俄文教科书和文献，读者可以从中了解到环与代数理论的另外一些体系和风格。〔1,3-9〕.半单代数的算术问题可以从书籍〔2〕或M.Denriug的经典教科书中去了解。可惜的是，后者至今尚未译成俄文。

在本书中，我们沿用通行的符号。特别是字母Q、R、C分别代表有理数域、实数域和复数域。我们对书中论断按节编序，例如“定理Ⅳ．6.5”指第四章中号码为6.5的定理（即第6节的第5个定理）．在第四章内，就把这个定理编号为定理6.5。

目 录

第一章　引　　论

§1　基本概念　例

域K上的**代数**或K-代数，是一个域K上的向量空间A，并在其中定义了双线性结合乘法。这就是说，从向量空间A中任取两个有序元素a和b，有A中唯一确定的元素与之对应，称为a、b的积，记作ab，并且$\forall a,b,c\in A$，$\alpha\in K$(纯量)满足下述公理：

1) $a(b+c)=ab+ac$;

2) $(b+c)a=ba+ca$;

3) $(\alpha a)b=a(\alpha b)=\alpha(ab)$;

4) $(ab)c=a(bc)$.

代数A叫作**有限维**或**无限维**代数，取决于A作为向量空间是有限维或无限维的。我们基本上研究有限维代数，尽管在某些章节中不得不遇到一些无限维代数的问题。

向量空间A的维数叫作代数A的**维数**，记作$[A:K]$。

从乘法的双线性易知，如果在向量空间A中取定一组基$\{a_1,\cdots,a_n\}$，则乘法由基向量的乘积$b_{ij}=a_ia_j$唯一确定。事实上，若$a=\sum_{i=1}^n\alpha_ia_i$，$b=\sum_{j=1}^n\beta_ja_j$，则

$$ab=\Big(\sum_{i=1}^n\alpha_i\,a_i\Big)\Big(\sum_{j=1}^n\beta_j\,a_j\Big)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \beta_j (a_i a_j)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \beta_j b_{ij}.$$

将b_{ij}用基向量线性表出：$b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{i\ j}^{\ k} a_k$. 我们看到，取定$A$的一组基，则向量空间$A$的代数结构由域$K$上的$n^3$个元素$\gamma_{i\ j}^{\ k}$ $(i, j, k = 1, \cdots, n)$唯一决定。这些元素叫作A的**结构常数**。

向量b_{ij}（从而结构常数$\gamma_{i\ j}^{\ k}$）不能随意指定。尽管按公式$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j a_j\right) = \sum_{i,j,k=1}^{n} \alpha_i \beta_j \gamma_{i\ j}^{\ k} a_k$定义的乘法是双线性的（即满足公理1)—3)），但并不能保证结合律成立。基元素乘法的结合性使结构常数有所限制。事实上，

$$(a_i a_j) a_k = \sum_{l=1}^{n} \gamma_{i\ j}^{\ l} a_l a_k$$

$$= \sum_{l,m=1}^{n} \gamma_{i\ j}^{\ l} \gamma_{l\ k}^{\ m} a_m,$$

$$a_i (a_j a_k) = a_i \sum_{l=1}^{n} \gamma_{j\ k}^{\ l} a_l$$

$$= \sum_{l,m=1}^{n} \gamma_{j\ k}^{\ l} \gamma_{i\ l}^{\ m} a_m,$$

从而推出，对任意i, j, k,

$$\sum_{l=1}^{n} \gamma_{i\,j}^{\,l} \gamma_{l\,k}^{\,m} = \sum_{l=1}^{n} \gamma_{j\,k}^{\,l} \gamma_{i\,l}^{\,m}. \tag{1}$$

反之，从关系式(1)知基元素的乘法满足结合律，从而易验，对代数的任意元素，乘法结合律成立。

令$\{\widetilde{a_1},\cdots,\widetilde{a_n}\}$是向量空间$A$的另一组基，从原来的基到新基的过渡矩阵$S=(s_{ij})$。这时

$$\begin{aligned}
\widetilde{a_i}\,\widetilde{a_j} &= \left(\sum_{l=1}^{n} s_{il}\,a_l\right)\left(\sum_{r=1}^{n} s_{jr}\,a_r\right) \\
&= \sum_{l,r=1}^{n} s_{il} s_{jr} (a_l a_r) \\
&= \sum_{l,r,m=1}^{n} s_{il} s_{jr} \gamma_{l\,r}^{\,m} a_m \\
&= \sum_{k,l,r,m=1}^{n} s_{il} s_{jr} \gamma_{l\,r}^{\,m} s'_{mk}\,\widetilde{a_k},
\end{aligned}$$

此处s'_{mk}是逆矩阵S^{-1}的元素。这样，与新基对应的结构常数形如

$$\widetilde{\gamma}_{i\,j}^{\,k} = \sum_{l,r,m=1}^{n} s_{il} s_{jr} s'_{mk} \gamma_{l\,r}^{\,m},$$

也就是说，元素$\gamma_{i\,j}^{\,k}$可以看作三阶张量的坐标（二阶协变，一阶逆变）。

代数A的元素e叫作代数的**单位元**，如果对任意元素$a\in A$，$ae=ea=a$。今后我们总是假定，在代数A中有单位元。代数的单位元e是唯一的，如果e'是另一个单位元，则$e=ee'=e'$。

单位元的存在性是普遍而没有限制的．如果代数A没有单位元，那么它总可以嵌入到一个有单位元的代数中．构造代数$\widetilde{A}$，$\widetilde{A}$由有序对(a,α)组成，此处$a\in A$，$\alpha\in K$，加法和纯量乘法按坐标进行，乘法按下述公式定义：

$$(a,\alpha)(b,\beta)=(ab+\alpha b+\beta a,\alpha\beta).$$

易验$\widetilde{A}$是代数，元素$(0,1)$是它的单位元．事实上，代数A与$\widetilde{A}$的性质完全相同，我们将在习题中阐明这一点．

例 1 域K上的n阶方阵的集合对于通常的矩阵运算组成n^2维有限代数，称之为全矩阵代数，记作$M_n(K)$．

例 2 域K上的单变元多项式组成无限维代数$K[x]$．

例 3 V是域K上的向量空间，则V的线性算子组成代数$E(V)$，这个代数是有限维或无限维代数，取决于V是有限维还是无限维向量空间．

例 4 实数域R上以$\{e,i,j,k\}$为基的四维向量空间，依下表定义乘法：

	e	i	j	k
e	e	i	j	k
i	i	$-e$	k	$-j$
j	j	$-k$	$-e$	i
k	k	j	$-i$	$-e$

（乘积ab写在a行b列的交叉处）．

易验，这样得到了一个域R上的代数H，有单位元e．这

个代数叫作四元数代数．它实际上是例 1 中代数的一种．

例 5 域K的任意扩张L，即以域K为子域的域，也可以看作域K上的代数．如果这个代数是有限维的，则称扩张为有限的，反之称扩张是无限的．

例 6 给出群G，把这个群的元素看作向量空间的基，即研究集合KG，由形如 $\sum_{g\in G} \alpha_g g$的形式和组成，此处$\alpha_g\in K$，仅有有限个非 0 ．群元素（我们的基！）的乘法建立了向量空间KG的代数结构．这个代数叫作群G在域K上的**群代数**，它在群表示论中有重要作用．

例 7 域K上的n元数组空间，即$(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$的集合，$\alpha_i\in K$，加法和纯量乘法按坐标进行，乘法也依坐标定义为：

$$(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)(\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1\beta_1,\cdots,\alpha_n\beta_n),$$

它显然成为域K上的代数，记作K^n．

例 8 设$A_1,\cdots$，A_n是域K上的代数，研究它们的卡氏积A，即$(a_1,\ \cdots,\ a_n)$的集合，其中$a_i\in A_i$，按坐标定义运算：

$$(a_1,\cdots,a_n)+(b_1,\cdots,b_n)=(a_1+b_1,\cdots,a_n+b_n),$$

$$\alpha(a_1,\cdots,a_n)=(\alpha a_1,\cdots,\alpha a_n),$$

$$(a_1,\cdots,a_n)(b_1,\cdots,b_n)=(a_1b_1,\cdots,a_nb_n).$$

显然，A成为域K上的代数，称为A_1，$\cdots$，A_n的**直积**，记作 $A_1\times\cdots\times A_n$ 或 $\prod_{i=1}^{n} A_i$．代数A_1，$\cdots$，A_n叫作代数A的直因子．最后，上例是此例在$A_1=\cdots=A_n=K$时的特殊情况．

代数A称为**交换的**，若A的乘法可换，即$\forall a, b\in A$，$ab=ba$。例2、5、7的代数交换。例6的代数当群G是可换群时交换。例8的代数当一切直因子可换时交换。上述其它例子中的代数非交换。

代数A的子集合B称为**子代数**，如果B本身对于A中的运算也成为代数，并包含A的单位元。换言之，B是A的子空间，且$e\in B$，若a，$b\in B$，则$ab\in B$。

例1 上三角矩阵的集合，即矩阵(a_{ij})，当$j<i$时，$a_{ij}=0$，是全矩阵代数$M_n(K)$的子代数，记作$T_n(K)$。

例2 对角矩阵也组成$M_n(K)$的子代数，记作$D_n(K)$。

例3 形如

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_{n-1} & \alpha_n \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} \\ 0 & 0 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-3} & \alpha_{n-2} \\ & \cdots & & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \end{pmatrix}$$

的矩阵的集合组成$M_n(K)$的n维子代数，叫作Jordan代数，记作$J_n(K)$。

例4 若H是G的子群，则KH是KG的子代数。

例5 c是代数A的元素，与A的全体元素可交换，即$\forall a\in A$，$ca=ac$，这样的元素c组成A的子代数，称为代数A的**中心**，记作$c(A)$。

例6 在代数A中，单位元素的纯量倍数，即形如αe，

$\alpha \in K$的元素的集合，因为$(\alpha e)(\beta e)=\alpha\beta e$，这个集合做成$A$的子代数，记作$Ke$。

任何理论都要对所研究的对象进行分类，我们试图对哪怕低维的代数分一下类。如果$[A:K]=1$，则$A=Ke$，这个代数的结构事实上已经完全确定了，因此，第一种有趣的情况是$[A:K]=2$。

取二维代数的一组基$\{e,a\}$，把e当作第一个基元，$a\notin Ke$. 这时代数的乘法由乘积$aa=a^2$决定，且结合律自然满足。此外，这样的代数一定交换。设$a^2=pa+qe$，p，q是域K的确定元素。考虑多项式$g(x)=x^2-px-q$。元素a是这个多项式的"根"。代数A的结构基本上决定于$g(x)$在域K上有什么样的根。有三种可能的情况。

情况1 $g(x)$在域K中有两个不同的根$x_1\neq x_2$. 这时$p=x_1+x_2$, $q=-x_1x_2$。令$b=(a-x_1e)/(x_2-x_1)$，因为$b\notin Ke$，$\{e,b\}$也是A的基，并且

$$\begin{aligned}b^2&=(x_2-x_1)^{-2}(a^2-2x_1a+x_1^2e)\\&=(x_2-x_1)^{-2}(pa+qe-2x_1a+x_1^2e)\\&=(x_2-x_1)^{-2}[(x_2-x_1)a-(x_2-x_1)x_1e]\\&=(x_2-x_1)^{-1}(a-x_1e)\\&=b.\end{aligned}$$

情况2 $g(x)$在域K中有一个二重根，即$g(x)=(x-x_1)^2$，$x_1\in K$。令$b=a-x_1e$，得到基$\{e, b\}$，

$$b^2=(a-x_1e)^2=g(a)=0.$$

情况3 $g(x)$在域K中没有根，也就是说$g(x)$在这个域上是既约的。这时A是域，即每个非0元素b有逆元b^{-1}，使$bb^{-1}=e$。求逆的最简单的途径是按照"有理化分母"的方

法进行.设$b=\alpha a+\beta e$，令$g(x)=(\alpha x+\beta)f(x)+r$此处$r\in K$，是$g(x)$被$\alpha x+\beta$除得的余项，$r\neq 0$，而$f(x)=\alpha' x+\beta'$。但$g(a)=0=(\alpha a+\beta e)(\alpha' a+\beta' e)+re$，即元素$(\alpha' a+\beta' e)/r$是$b$的逆。

于是我们得到下述结果。

定理1.1 域K上的二维代数A或者本身也是域，或者可以找到一组基$\{e,b\}$，使$b^2=b$或$b^2=0$。

如果K是代数闭域（例如复数域），则情况3不会出现。

§2 同构与同态 可除代数

当写出二维代数时，我们发现，它们当中有许多（例如全体情况1或情况2中的代数）在某种意义下具有完全“相同的结构”，比如可以在它们当中取出基，带有相同的乘法表。这样的代数具有完全相同的性质，在本质上没有区别，尽管它们可以定义于不同的向量空间。很自然地将这些代数视为同一，并简单地认为它们是同一个代数的不同样品。这就引出了代数理论（和许多数学理论）中的一个重要概念——同构。

代数A到代数B的**同构**，是从空间A到空间B的满单线性映射f，并保持乘法，即$\forall a_1,\ a_2\in A$，$f(a_1a_2)=f(a_1)f(a_2)$。如果存在代数A到代数B的同构，则称代数A与代数B**同构**，记作$A\simeq B$，必要时可以指明同构映射f，$f:A\simeq B$。

显然，同构$f:A\simeq B$的存在性相当于在A与B中能够找

到带有相同乘法表的基。特别地，上节情况 1 或情况 2 中的二维代数彼此同构。

在代数理论中，同构的代数原则上不加区别。称代数研究“精确到同构”。比如，在代数闭域K上，精确到同构只有两个二维代数，不难看出，它们是K^2和$J_2(K)$。

同构的一个经典例子是，n维空间V的线性算子代数$E(V)$与全矩阵代数$M_n(K)$同构，取定V的一组基，将算子对应到它在这组基下的矩阵即可。这一同构对于线性代数有着重大的意义。

还有许多同构代数的例，比如K^n与$D_n(K)$（对角矩阵代数）同构。

最后，对任意有单位元e的代数A，子代数Ke同构于基础域K。今后，我们总是将域K的元素α与其在这一同构下的像元素$\alpha e\in A$视为同一，并把域K看作任意K-代数A的子代数。特别地，我们经常将代数A的单位元简记作 1。

在代数理论中，同态的概念也有重要作用。

代数A到代数B的**同态**是一个线性映射$f: A\to B$，保持乘法和单位元，即任取a_1，$a_2\in A$，$f(a_1a_2)=f(a_1)f(a_2)$，且$f(e_A)=e_B$，此处e_A是代数A的单位元，e_B是B的单位元*。

如果同态f单，即从$a_1\neq a_2$推出$f(a_1)\neq f(a_2)$，称之为**单同态**。如果f满，即对任意$b\in B$，可以找到$a\in A$，使$b=f(a)$，称之为**满同态**。

显然，如果f即是单同态，又是满同态，则f是同构。这时（仅仅在这时）f有逆映射f^{-1}，是B到A的同构。

* 此处同态指非零同态——译者注。

因为f是线性映射，只要从$f(a)=0$得到$a=0$，即可推出单性。事实上，如果$f(a_1)=f(a_2)$，则$f(a_1-a_2)=0$，从而$a_1-a_2=0$，即$a_1=a_2$。

像对任意映射一样，也可以定义同态的乘法或合成：如果f：$A\to B$，g：$B\to C$是代数同态，映射gf：$A\to C$由法则$gf(a)=g(f(a))$确定，易验gf也是同态。同态的乘法是结合的，如果乘积$(gf)h$和$g(fh)$当中有一个确定，则另一个也随之确定，并且二者相等。

举一个同态的例子。设a是代数A的确定的元素。考虑映射$K[x]\to A$，将多项式$f(x)=\alpha_0x^n+\cdots+\alpha_n$映到元素$f(a)=\alpha a^n+\cdots+\alpha_n$。显然，这是一个同态，它的像由全体形如$f(a)$的元素组成。这个像通常记作$K[a]$，并称为元素$a$的**独生子代数**。特别地，如果$K[a]=A$,代数$A$本身称为**独生的**.元素$f(a)$叫作$f(x)$在$x=a$时的值。

现在转入对代数的内部性质及其元素的研究。

代数A的元素a叫作左（右）**零因子**，如果有非0元素$b\in A$，使$ab=0$（相应地$ba=0$）。

类似地，a叫作左(右)**单位**，如果有元素$b\in A$,使$ab=1$（相应地$ba=1$）。

如果a同时是左、右单位，即存在b与b',使$ab=b'a=1$,则$b'=b'(ab)=(b'a)b=b$,且若$ac=1$,则$b=b(ac)=(ba)c=c$。这样，b是使$ab=1$的唯一元素，类似地,也是使$ba=1$的唯一元素。这时，元素a称为**可逆的**，b是a的**逆元**，记作$b=a^{-1}$。

一般来说，上述四种元素之间的关系是相当复杂的，但在有限维代数中却很简单。

定理2.1 在有限维代数中，

1)所有的左零因子（单位）是右零因子（单位），反之亦然。

2)所有的元素都是零因子或单位。

3)零因子不是单位。

证：a)首先指出，左（右）零因子不能是右(左)单位。事实上，设$ab=0$，但$b\neq 0$，同时$ca=1$。则有$0=c(ab)=(ca)b=b$，与所设$b\neq 0$矛盾。

b)现在设代数A是有限维的，$a\in A$不是左零因子。考虑向量空间A到自身的映射f，由公式$f(x)=ax$定义。从代数公理可知f是线性映射，并且因为a不是零因子，从$f(x)=0$知$x=0$。但A是有限维的，所以f是满秩映射，其像重合于A。特别地，存在$b\in A$，使$1=f(b)=ab$，a是左单位。

类似地，如果a不是右零因子，则为右单位。

c)现在我们可以完成定理的证明。如果元素$a\in A$是左零因子，则由a)知它不是右单位，又由b)知它必须是右零因子。1)中其余的论断证明类似。然后从a)推出3)，从b)推出2)。

每一个非0元素都可逆的代数叫作**可除代数**。

推论2.2 无零因子的有限维代数是可除代数。

推论2.3 可除代数的有限维子代数是可除代数。特别地，有限维可除代数的中心是域。

有限维K-代数A的任意元素都是某个非0多项式$f(x)\in K[x]$的“根”（这就意味着$f(a)=0$）。如若不然，代数$K[a]$就会与$K[x]$同构，但因空间$K[x]$的维数无限，这是不可能的。以a为根的最低次首项系数为1的多项式叫作元素a

的**最小多项式**，记作$m_a(x)$。

命题2.4 以a为根的任意多项式都可以被最小多项式$m_a(x)$整除，特别地，最小多项式是唯一的。

证：设$f(a)=0$，用$m_a(x)$对$f(x)$做带余除法：$f(x)=m_a(x)g(x)+r(x)$，$r(x)$或为0，或其次数小于$m_a(x)$的次数。但$f(a)=r(a)=0$，从而第二种可能性不存在，$f(x)$被$m_a(x)$整除。

命题2.5 如果A是域K上的有限维可除代数，则对任意元素$a\in A$，最小多项式$m_a(x)$是既约的。

证：若$m_a(x)=f(x)\cdot g(x)$，此处f、g是次数较低的多项式，则$0=m_a(a)=f(a)g(a)$，但$f(a)\neq 0$，$g(a)\neq 0$，得到矛盾。

推论2.6 如果域K是代数闭域，则域K上只有唯一的有限维可除代数，即K本身。

证：若A是这样的代数，a是A的任意元素，则$m_a(x)$是既约多项式，由于K的代数封闭性，它是线性的：$m_a(x)=x-\alpha$，因$m_a(a)=0$，从而$a=\alpha\in K$，于是$A=K$。证毕。

§3 表示和模

本章开头给出的代数的定义是方便可行，具有普遍性的，因为它概括了相当广泛的一类对象。但研究代数的结构和性质时，所给代数的具体实现，比如解释成某个矩阵（或线性算子）代数，常常发挥实质性的作用。表示理论就是研究这种实现的。在本书中的许多地方，它将成为我们进行研究的基本工具。

V是域K上的向量空间，$E(V)$是V的线性算子代数，称K-代数A到$E(V)$的同态T为A的**表示**。换言之，A的一个表示T，意味着任取元素$a\in A$，对应着一个线性算子$T(a)$，并且对任意$a,b\in A$，$\alpha\in K$满足

$$
\begin{aligned}
&T(a+b)=T(a)+T(b),\\
&T(\alpha a)=\alpha T(a),\\
&T(ab)=T(a)T(b),\\
&T(1)=E\ (\text{恒等算子})\ .
\end{aligned}
$$

如果向量空间V是有限维的，则其维数叫作表示T的**维数**（或阶数）。显然，表示T的像，即全体形如$T(a)$的算子，组成$E(V)$的子代数。如果T是单同态，这个子代数与代数A同构。这时，表示称为**忠实的**。

定理3.1(Cayley)　任意代数都有忠实表示.换言之,任意代数都可以同构于某一线性算子代数的子代数。

证：从代数的定义可知，任取元素$a\in A$，映射$T(a)$：$x\to xa$，$x\in A$是向量空间A的线性算子,并且$T(a+b)=T(a)+T(b)$，$T(\alpha a)=\alpha T(a)$，$T(ab)=T(a)T(b)$，$T(1)=E$（恒等算子）。所以T是代数A的表示.如果$a\neq b$，则$1a\neq 1b$.意味着算子$T(a)$与$T(b)$不同，故T是忠实表示。证毕。

在Cayley定理的证明中构造的表示称为**正则表示**，它在代数理论中有重要意义（这是可以预料的，因为它给出了已知代数的一种比较简单而标准化的实现方法）。正则表示的维数等于代数的维数。

如果表示T是有限维的（今后我们只研究这种表示），则可在向量空间V中取一组基，并将每一个算子$T(a)$对应到它的矩阵$[T(a)]$。显然，对应$a\to[T(a)]$是代数A到全矩阵

代数$M_n(K)$的同态，此处n是表示T的维数。这个同态称为代数A的**矩阵表示**。如果在向量空间V中取一组新的基，过渡矩阵是C，则每一个矩阵$[T(a)]$被$C[T(a)]C^{-1}$代替。这样的两个矩阵表示称为**等价**的表示。

等价的概念也可以对算子表示定义：两个表示T：$A \to E(V)$和S：$A \to E(W)$叫作等价的表示，如果存在向量空间V到W的同构f，使得任取$a \in A$，$T(a) = fs(a)f^{-1}$。由此可以推出，在这种情况下，能够在V和W中选基，使算子$T(a)$与$S(a)$的矩阵相同。所以研究精确到等价的表示，也就是说，将等价的表示视为同一，是有意义的。

这样，我们以后不再区分表示和相应的矩阵表示。定理3.1（Cayley定理）可以叙述为：任意有限维代数同构于全矩阵代数的子代数。（为使正则表示是有限维，代数维数的有限性显然是必须的）。

按照惯例，不必将向量空间V和同态T：$A \to E(V)$分开研究，而是将代数A的元素直接看作V的算子。这就引出了模的概念。

K-代数A上的**右模**或**右A-模**是域K上的一个向量空间，记作M，在M与A的元素之间定义了乘法运算，即任取$m \in M$，$a \in A$，元素对(m, a)对应着唯一确定的元素$ma \in M$，且满足下述公理：

1) $(m_1 + m_2)a = m_1a + m_2a$；

2) $m(a_1 + a_2) = ma_1 + ma_2$；

3) $(\alpha m)a = m(\alpha a) = \alpha(ma)$，此处$\alpha \in K$；

4) $m(ab) = (ma)b$；

5) $m1 = m$。

我们指出，按照代数A的任意表示，都可以构造A上的右模。反之：按照任意右模，可以构造表示。

设T：$A\to E(V)$是代数A的表示。定义V的元素与A的元素的乘法，任取$v\in V$，$a\in A$，令$va=vT(a)$。由表示的定义立知，这样的V变成右A-模。我们说这个模对应着表示T。

反之，若M是右A-模，则由模的定义推出，取定元素$a\in A$，映射$T(a)$：$m\to ma$是空间M的线性算子。将a对应于算子$T(a)$（或它在某组基下的矩阵），便得到了代数A对应于模M的表示。

特别地，与正则表示对应的是**正则模**。这时$M=A$，ma是元素m与a在代数A中的积。

今后若无特别说明，所研究的模都是有限维的（即作为域K上的向量空间是有限维的）。

对于模，也可引入同态和同构的概念。

右A-模M到右A-模N的**同态**是一个线性映射f：$M\to N$，且对任意元素$m\in M$，$a\in A$，$(ma)f=(mf)a$。

如果除此之外f还是满单的，则称之为**同构**，模M与N叫作**同构的**模。这时记f：$M\tilde{\to}N$，或简写作$M\simeq N$。同构的模具有完全相同的性质，可以视为同一。

定理3.2 与同构的模对应的表示等价，反之，与等价表示对应的模同构。

证：设T和S是代数A的两个表示，分别对应着模M与N，而f：$M\tilde{\to}N$。这时，对任意$m\in M$和$a\in A$，有等式

$$mT(a)f=(ma)f=(mf)a=mfS(a).$$

即$T(a)f=fS(a)$或$T(a)=fS(a)f^{-1}$。

反之，设表示T与S等价，$T(a)=fS(a)f^{-1}$。若M，N是对应的模，则f是M到N的满单线性映射，并且

$$(ma)f=mT(a)f=mfs(a)=(mf)a$$

对任意$m\in M$，$a\in A$成立，即f是模同构。

这样，模同构的概念与等价表示的概念一一对应。

今后为方便起见，将右模的同态写在元素的左边，即以fa代替af。若不作相反的说明，我们处处使用这一符号系统。

模的同态也像代数的同态一样可以相乘，取同态f：$M\to N$，g：$N\to L$，其积是映射gf：$M\to L$，任取$m\in M$，$gf(m)=g(f(m))$（易验gf也是同态）。

但是对模同态，还可以定义其它的运算：加法和纯量乘法。若f和g是模M到模N的同态，$\forall m\in M$，规定$(f+g)(m)=f(m)+g(m)$，则$f+g$也可以看作$M\to N$的映射，取定$\alpha\in K$，$\forall m\in M$，规定$(\alpha f)(m)=\alpha f(m)$，$\alpha f$亦可看作$M\to N$的映射。

易知上述定义的$f+g$与αf也是同态，M到N的一切同态对于这些运算成为域K上的向量空间，记作$\mathrm{Hom}_A(M, N)$.

同态的乘法具有熟知的性质：它是结合的，只要乘积有意义，则$(gf)h=g(fh)$（显然两端同时有意义），它是分配的，只要表达式有意义，则$g(f+h)=gf+gh$；$(g+f)h=gh+fh$；$g(\alpha f)=(\alpha g)f=\alpha(gf)$，这些性质的简单验证留给读者。

如果同态f：$M\to N$是单射，即从$m_1\neq m_2$可推出$f(m_1)\neq f(m_2)$，称之为**单同态**。如果f是满射，即N的任意元素都可以表成$f(m)$的形式，则称之为**满同态**。显然，如果f

既是单同态又是满同态，则为同构。与代数的情况相同，判断单同态f，只要能从$f(m)=0$推出$m=0$即可。

与右模的概念类似，可以定义代数A上的**左模**，L是向量空间，对A与L的元素定义乘法，任取$a\in A$，$l\in L$，则$al\in L$，且满足下述公理：

1) $a(l_1+l_2)=al_1+al_2$；

2) $(a_1+a_2)l=a_1l+a_2l$；

3) $a(\alpha l)=(\alpha a)l=\alpha(al)$，$\alpha\in K$；

4) $(ab)l=a(bl)$；

5) $1l=l$。

左模对应着代数A的**反表示**，也就是线性映射T：$A\to E(V)$满足$T(ab)=T(b)T(a)$，$T(1)=E$。对于反表示和左模，如同表示和右模一样，可以引出等价，同态和同构的概念。也有类似于3.1和3.2的定理。特别地，将代数A看作自身上的左模，得到了**左正则模**和**正则反表示**。

以后我们基本上研究右模，简称为代数A上的**模**或A-模。读者容易看出，所证的一切结果对左模仍然有效。所以我们在必要时可以运用它们而不再加以说明。

§4 子模和商模　理想和商代数

我们知道，在线性代数中，算子的不变子空间的概念十分重要。如果给出代数A的表示T：$A\to E(V)$，自然想到去考察V的在这一表示的任意算子下不变的子空间。这就引出了子模的概念。

A-模M的**子模**是M的一个子空间N，对任意元素$n\in N$

和$a\in A$，$na\in N$。

在子模N中取一组基$\{e_1, \cdots, e_k\}$，并扩充成M的基：$\{e_1, \cdots, e_k, e_{k+1}, \cdots, e_m\}$。在这组基下，对应于模$M$的表示$T$形如

$$T(a)=\begin{pmatrix} T_1(a) & 0 \\ X(a) & T_2(a) \end{pmatrix} \qquad (1)$$

这样的表示(及其任意与之等价的表示)叫作**可约**表示。显然，T_1是对应于模N的表示。

反之，设表示T是可约的，有(1)的形式，且T_1是k维表示。这时，前k个基向量生成的子空间N对于任意算子$T(a)$不变，故成为M的子模。

从矩阵的分块运算推知，映射$a\to T_2(a)$也是代数A的表示。下面我们就来找出与T_2对应的模。

设$m\in M$，考察集合$m+N$，它由形如$m+n$的元素组成，此处n跑遍N。这样的集合叫作M对N的**剩余类**[1]。如果元素x属于集合$m+N$，则称x模N**等于**m，记作$x\equiv m(\mathrm{mod}N)$.我们指出，任意两个剩余类或是重合，或不相交。

事实上，若$(m_1+N)\cap(m_2+N)\neq\varnothing$，则有$n_1, n_2\in N$，使$m_1+n_1=m_2+n_2$，从而$m_1-m_2=n_2-n_1=n_0\in N$，任取元素 $n\in N$，$m_1+n=m_2+n_0+n\in m_2+N$，而$m_2+n=m_1+n-n_0\in m_1+N$，即$m_1+N=m_2+N$。

易验，若$x\in m+N$，$y\in m'+N$，则$x+y\in(m+m')+N$，此外，$\forall\alpha\in K$，$a\in A$，$\alpha x\in\alpha m+N$，$xa\in ma+N$，因此可以在剩余类的集合上定义A-模结构，令

(1)显然，剩余类$m+N$是通过向量m，以子空间N定向的线性流形.

$$(m+N)+(m'+N)=(m+m')+N,$$
$$\alpha(m+N)=\alpha m+N,$$
$$(m+N)a=ma+N. \qquad (2)$$

模的公理全部满足，因为剩余类的运算，取决于它们的代表元在模M中的运算。

M对N的剩余类的集合连同由公式(2)定义的模结构称为模M于子模N的**商模**，记作M/N。

我们指出，商模与一个自然映射π同时出现，π：$M\to M/N$，将元素$m\in M$送到剩余类$m+N$。公式(2)表明，π是同态（显然满）。这个满同态叫作M到商模M/N上的**投射**。

简单的验证表明（留给读者），如果$\{e_1, \cdots, e_k\}$是N的基，$\{e_{k+1}, \cdots, e_n\}$是到M的基的扩充，则剩余类$\pi(e_{k+1})$，…，$\pi(e_n)$构成M/N的基，且对应的表示与T_2重合。

正则模的子模称为代数A的**右理想**。这就是说，右理想是A的一个子空间I，并且任取元素$x\in I$和$a\in A$，都有$xa\in I$。左正则模的子模叫作代数A的**左理想**。必须指出，在"右理想"这一术语中，一定不能省略右字，因为"理想"一词有另外的含义。

子模和商模的重要例子产生于同态的研究。

设f：$M_1\to M_2$是A-模同态。考察满足$f(m)=0$的元素$m\in M_1$，所有这样的元素m组成的集合叫作同态f的**核**，记作Ker$f$。M_2中形如$f(m)$，$m\in M_1$，的元素的集合叫作同态f的**像**，记作I$_m f$。

定理4.1（同态定理） 对任意同态f：$M_1\to M_2$，核与像分别是M_1和M_2的子模，且$\mathrm{I_m}f\simeq M_1/\mathrm{Ker}f$。

证：若$f(m)=f(m')=0$，则$f(m+m')=f(m)+f(m')=0$，$f(am)=af(m)=0$，$f(ma)=f(m)a=0$，即$\mathrm{Ker}f=N_1$是M_1的子模。类似地，由于$f(m)+f(m')=f(m+m')$，$af(m)=f(am)$，$f(m)a=f(ma)$，$\mathrm{Im}f=N_2$是M_2的子模。

设$m+N_1$是M_1/N_1的元素，$x\in m+N_1$。则$x=m+n$，$f(n)=0$，从而$f(x)=f(m)$。因此，令$g(m+N_1)=f(m)$，g：$M_1/N_1\to N_2$是一个映射，并且根据f是同态及公式(2)定义的商模的运算，得到g也是同态。

设$g(m+N_1)=0$。则$f(m)=0$，故$m\in N_1$，$m+N_1=0+N_1$是商模M_1/N_1的0剩余类，g是单同态。由于N_2当中所有的元素都具有形状$f(m)=g(m+N_1)$，g是满同态，从而$M_1/\mathrm{Ker}f$与$\mathrm{Im}f$同构。

同态定理虽然简单，却在模的研究中起重要作用。我们通过一个例子来说明这一点。

模M称为**循环模**，如果存在一个元素m_0使M中的一切元素都可以写成m_0a的形式，其中$a\in A$。元素m_0叫作模M的**生成元**。

推论4.2 任意循环模都同构于正则模对某个右理想的商模。

证：设M是以m_0为生成元的循环模。映射f：$A\to M$将元素a映到m_0a，由模的公理易知，f是模同态，又因为m_0是生成元，$\mathrm{Im}f=M$。这时$M\simeq A/\mathrm{Ker}f$，此处$\mathrm{Ker}f$是右理想。

我们也经常运用下述把同态定理更细致化的结果。

定理4.3(Noether) 设N是M的子模，π是M到$\bar{M}=M/N$上的投射。对任意M的子模L，令$\pi(L)=\{\pi(x)\mid x\in L\}$，对任意$\bar{M}$的子模$\bar{L}$，令$\pi^{-1}(\bar{L})=\{x\in M\mid \pi(x)\in\bar{L}\}$。则

1) $\pi(L)$是$\bar{M}$的子模，而$\pi^{-1}(\bar{L})$是M中包有N的子模；

2) $\pi(\pi^{-1}(\bar{L}))=\bar{L}$，如果$L\supset N$，则$\pi^{-1}(\pi(L))=L$；

3) 若$L=\pi^{-1}(\bar{L})$，则$L/N\simeq\bar{L}$，而$M/L\simeq\bar{M}/\bar{L}$。

这样，我们得到了$\bar{M}$的子模与M中包含N的子模之间的一一对应，并且这个对应与取商模的运算协调一致。

证：结论1)显然。其次，任取元素$\bar{x}\in\bar{L}$，$\bar{x}$形如$\pi(x)$，此处$x\in M$，又因为$\bar{x}=\pi(x)\in\bar{L}$，应当有$x\in\pi^{-1}(\bar{L})$，这就证明了公式$\bar{L}=\pi(\pi^{-1}(\bar{L}))$。

现设L是M中包有N的子模。将π限制到L上，得到同态$\bar{\pi}$：$L\to\bar{M}$，$\bar{\pi}$的核是N，像是$\pi(L)=\bar{L}$，显然，$\pi^{-1}(\bar{L})\supset L$. 反之，若$m\in\pi^{-1}(\bar{L})$，则$\pi(m)\in\bar{L}$，从而形如$\pi(x)$，此处$x\in L$。由等式$\pi(m)=\pi(x)$得$\pi(m-x)=0$，即$m-x=n\in N$，但$N\subset L$，所以$m=x+n\in L$。于是证明了$\pi^{-1}(\bar{L})=L$和$\bar{L}=\mathrm{Im}\bar{\pi}\simeq L/\mathrm{Ker}\bar{\pi}=L/N$。

将$\bar{M}$到$\bar{M}/\bar{L}$上的投射记作τ，考察同态$\tau\pi$：$M\to\bar{M}/\bar{L}$. 由于τ和π是满同态，$\tau\pi$也是满同态。

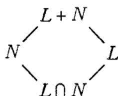
我们来找出核$\mathrm{Ker}\tau\pi$. $\tau\pi(m)=0$意味着$\pi(m)\in\bar{L}$，即$m\in\pi^{-1}(\bar{L})=L$，所以$\mathrm{Ker}\tau\pi=L$，由同态定理知，$\bar{M}/\bar{L}\simeq M/L$。

如果情况发生变化，L是M的子模，但不包含N。按照以前的作法，可以考察$\bar{\pi}$：$L\to M/N$，即投射π：$M\to M/N$在L上的限制。$\pi(x)=0$即$x\in N$，从而$\mathrm{Ker}\bar{\pi}=L\cap N$，而$\bar{L}=\mathrm{Im}\bar{\pi}\simeq L/L\cap N$，但我们已经得到了$\bar{L}\simeq\pi^{-1}(\bar{L})/N$。同时$m\in\pi^{-1}(\bar{L})$，当且仅当存在$x\in L$，使$\pi(m)=\pi(x)$，即有$n\in N$，使$m=x+n$，因此像通常一样用$L+N$表示$M$当中由

一切可能的和$x+n$组成的子空间。我们看到，$L+N=\pi^{-1}(\bar{L})$是M的子模（可以直接验证），且$(L+N)/N\simeq\bar{L}\simeq L/L\cap N$。这就证明了下述定理。

定理4.4(Noether) 对模M中的任意子模L和N，$(L+N)/N\simeq L/L\cap N$。

若将子模L，N，$L+N$和$L\cap N$在M当中的关系表示出来，就得到了一个"平行四边形"



商模$(L+N)/N$和$L/L\cap N$是"平行四边形的一组对边"。因此，我们有时把第二Noether定理称为"平行四边形法则"。

自然地，我们希望在代数同态的情况下也得到相应的结果，这就引出了理想的概念（有时称为双边理想）。

设A和B是域K上的两个代数，φ：$A\to B$是K-代数同态。像$\mathrm{I_m}\varphi=\{\varphi(a)\,|\,a\in A\}$是$B$的子代数，但核$\mathrm{Ker}\varphi=\{a\in A\,|\,\varphi(a)=0\}$不是子代数，因为其中没有单位元。由于$\varphi$是线性映射，所以$\mathrm{Ker}\varphi$是$A$的子空间。此外，若$x\in\mathrm{Ker}\varphi$，则对任意$a\in A$，$\varphi(ax)=\varphi(a)\varphi(x)=\varphi(a)0=0$，类似地，$\varphi(xa)=0$，即$ax$，$xa$在$\mathrm{Ker}\varphi$中。换言之，$\mathrm{Ker}\varphi$既是右理想，也是左理想。

在代数当中，同时是右理想和左理想的子空间叫作**理想**。

按照任意理想$\mathrm{I}\subset A$，可以建立下述形式的新的代数。

仍然考察A对I的剩余类的集合。若$a+I$和$b+I$是两个剩余类，则任取$x\in a+I$和$y\in b+I$，元素$xy\in ab+I$。所以剩余类的集合可以作成域K上的代数，令

$$(a+I)+(b+I)=(a+b)+I,$$
$$\alpha(a+I)=\alpha a+I,\ \alpha\in K,$$
$$(a+I)(b+I)=ab+I.$$

这个代数叫作代数A关于理想I的**商代数**，记作A/I。其0元素是剩余类$0+I=I$，单位元素是$1+I$。

映射π：$A\to A/I$，由$\pi(a)=a+I$定义，是代数A到商代数A/I上的满同态。叫作A到A/I的**投射**。

下述结果完全类似于模的相应定理。其证明亦基本相同，我们留给读者作为简单的练习。

定理4.5（同态定理） 对任意代数同态φ：$A\to B$，$\mathrm{Im}\varphi\simeq A/\mathrm{Ker}\varphi$。

推论4.6 设$A=K[a]$是独生子代数，则$A\simeq K[x]/I$，此处I是理想，由一切可以被$m_a(x)$除尽的多项式组成。

定理4.7(Noether) 设π是代数A到商代数$\bar{A}=A/I$的投射，任取子集合$B\subset A$，令$\pi(B)=\{\pi(b)\mid b\in B\}$，任取子集合$\bar{B}\subset\bar{A}$，令$\pi^{-1}(\bar{B})=\{b\in A\mid \pi(b)\in\bar{B}\}$，则

1）如果B是A的理想（子代数），则$\pi(B)$是$\bar{A}$的理想（子代数）；如果$\bar{B}$是$\bar{A}$的理想（子代数），则$\pi^{-1}(\bar{B})$是A的理想(子代数)；

2）对任意理想（子代数）$\bar{B}\subset\bar{A}$，$\pi(\pi^{-1}(\bar{B}))=\bar{B}$；对任意包含$I$的理想（子代数）$B\subset A$，$\pi^{-1}(\pi(B))=B$；

3） 如果$\bar{B}$是$\bar{A}$的理想（子代数），$B=\pi^{-1}(\bar{B})$，则$A/B\simeq\bar{A}/\bar{B}$（相应地$B/I\simeq\bar{B}$）。

定理4.8 （Noether）如果I是A的理想，而B是子代数，则$(B+I)/I\simeq B/B\cap I$。

如果N是模M的子模，I是环A的右理想，定义NI为形如$\sum_i n_i a_i$的元素的集合，此处$n_i\in N$，$a_i\in I$。易见，NI也是M的子模。有可能$NI=0$，即任取$n\in N$，$a\in I$，$na=0$。在这种情况下，称I将模N**零化**。对任意模M，都能够在A中找到可以将M零化的最大右理想：$A_{nn}M=\{a\in A\mid \forall m\in M\ ma=0\}$，显然，$A_{nn}M$是$A$的右理想，而且还是$A$的理想。叫作模$M$的**零化子**。

如果理想I将M零化，则M可以看作商代数A/I上的模，只要令$m(a+I)=ma$即可（易见，这个定义与剩余类$a+I$的代表元的选择无关）。最后，在这种情况下，I零化模M的任意子模和商模，并且M的"构造"与将它看作是A-模或是A/I-模无关。

反之，任意A/I-模都可以看作A-模，只要令$ma=m(a+I)$（在这种情况下，I自动将M零化）。

若A-模M被理想I零化，则我们总是将A-模M与A/I-模M视为同一。特别地，我们常常需要把正则A/I-模看作A-模。显然，理想I是它的零化子。

我们还发现，任取模M的元素m和任意右理想$I\subset A$，子集合$mI=\{ma\mid a\in I\}$也是A的子模。若$mI=0$，则称I将m**零化**。在把给定元素m零化的一切右理想当中，最大的一个叫作m的**零化子**：$A_{nn}m=\{a\in A\mid ma=0\}$。与模的零化子不同，$A_{nn}m$可以不是理想（看本章习题9）。

§5 Jordan-Hölder定理

在任意非 0 模M中，至少有两个子模：M本身和零子模（这两个子模叫作**平凡的**）．如果M中没有其它子模，则称M为**单模**．与单模对应的表示叫作**既约表示**，这就是说，在任何一组基下，它都不能写成§4(1)式的形状．

设M不是单模，则可以在M中找到一个非平凡子模N，即$N\neq 0$，$N\neq M$（也就是说$M/N\neq 0$）．我们说，模M是核N借助于模$L=M/N$的**扩张**．根据同态定理，这就等价于存在$M\to L$的满同态，以N为核．

如果L和N还不是单模，则可以取L的非平凡子模L_1和N的非平凡子模N_1．根据定理4.3，在M中存在包有N的子模N_2，使$L_1\simeq N_2/N$．结果在M中引出了一个子模链：$M\supset N_2\supset N\supset N_1\supset 0$．若此链中模$N_1$或商模$M/N_2$，$N_2/N$，$N/N_1$中的任意一个还不是单的，则仍可以按照上述方法插入一些子模．由于M的维数有限，这个过程不能无限制地继续下去．最后我们得到了M的子模链：$M=M_0\supset M_1\supset M_2\supset\cdots\supset M_{s-1}\supset M_s=0$，所有的商模$M_i/M_{i+1}$都是单的．这样的链叫作模$M$的**合成列**．商模$M_i/M_{i+1}$叫作**合成因子**，而子模的个数$s$叫作合成列的**长度**．

可以说，合成因子是"构件"，模M借助于它们的逐次扩张建立起来．最后，一般来说，这些因子不是唯一确定的，但它们提供了关于模M结构的充分信息．自然要问，它们被模M确定时有多少唯一性．这个问题的答案引出了下述重要定理．

定理5.1 (Jordan-Höldar) 如果$M=M_0\supset M_1\supset\cdots\supset M_s=0$和$M=N_0\supset N_1\supset\cdots\supset N_t=0$是两个合成列，则它们的长度相等，并且在两个合成列的因子之间可以建立一个一一对应，使对应的因子同构。

证：对s用归纳法。如果$s=1$，则模$M=M_0/M_1$是单模。因此$t=1$且$N_0/N_1=M=M_0/M_1$。现在设$s>1$，对于长度是$s-1$的合成列定理成立。

若$M_1=N_1$，则$M_0/M_1=N_0/N_1$，结论从归纳假设立得。如果$M_1\neq N_1$，则$M_1+N_1\neq M_1$，由于M与M_1之间没有中间子模，所以$M_1+N_1=M$，根据平行四边形法则：

$$N_1/M_1\cap N_1\simeq M/M_1;$$

$$M_1/M_1\cap N_1\simeq M/N_1.$$

在模$M_1\cap N_1$中建立合成列

$$M_1\cap N_1=L_2\supset L_3\supset\cdots\supset L_k=0.$$

这时$M_1\supset L_2\supset\cdots\supset L_k=0$是$M_1$的合成列。与合成列$M_1\supset M_2\supset\cdots\supset M_s=0$比较，由归纳假设可知$s=k$，两个列的合成因子一一对应，对应的因子彼此同构。

现在比较合成列$M\supset M_1\supset L_2\supset\cdots\supset L_s=0$与$M\supset N_1\supset L_2\supset\cdots\supset L_s=0$。从第三个位置开始，它们的因子重合，又由上面建立的同构关系$M/M_1\simeq N_1/L_2$及$M/N_1\simeq M_1/L_2$易见这两个合成列的全部因子两两同构。

最后，比较合成列$N_1\supset L_2\supset\cdots\supset L_s=0$和$N_1\supset N_2\supset\cdots\supset N_t=0$，仍由归纳假设得到$s=t$，并且它们的因子两两同构。这就意味着最初的合成列的因子也是两两同构的（在某种一一对应之下）。从而完成了定理的证明。

合成列的长度叫作**模M的长度**，记作$l(M)$。合成因子

叫作模M的**单因子**。根据Jordan-Hölder定理，长度和单因子与合成列的选择无关。

我们发现，一般来说，在合成列中确定的单因子的先后顺序不是唯一的。例如下章研究的半单模，顺序可以是任意的。

推论5.2 如果模M是核N借助于模L的扩张，则$l(M) = l(N) + l(L)$。

证：模$L \simeq M/N$，引出L中的合成列：$L = L_0 \supset L_1 \supset \cdots \supset L_k = 0$，并找出$L_i$在$M$中的原像$M_i$。根据定理4.3，$M_i/M_{i+1} \simeq L_i/L_{i+1}$是单模．再建立模$N$中的合成列：$N = N_0 \supset N_1 \supset \cdots \supset N_t = 0$。则

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_k = N = N_0 \supset N_1 \supset \cdots \supset N_t = 0$$

是模M的合成列，长度为$k+t$，命题得证。

推论5.3（Glassman公式） 如果L和N是M的子模，则

$$l(L+N) + l(L \cap N) = l(L) + l(N)。$$

证：可以从推论5.2和平行四边形法则直接得到。

称模M的子模N是**极大子模**，若$N \neq M$，并且没有不同于M和N的子模L，使$M \supset L \supset N$。显然，这就等价于说，商模M/N是单的。在合成列中，每一个模都是前一个模的极大子模。

§6 直　　和

对子模和商模的了解提供了有关整个模的结构的大量信息。如果回顾一下模所对应的表示的矩阵写法（§4公式(1)），

这件事就变得特别清楚了。但是，一般来说，矩阵左下角的 $X(a)$不由子模和商模决定，它的构成是相当复杂的。

最简单的情况当然是$X(a)$引起的补充信息消失了，即 $X(a)=0$，这时表示形如：

$$T(a)=\begin{pmatrix} T_1(a) & 0 \\ 0 & T_2(a) \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

这样的表示（连同与之等价者）叫作**完全可约表示。**

用模的语言来说，完全可约表示的概念引出了模的直和。

设M_1，M_2，…，M_n是代数A上的模。考察由$(m_1,\cdots,m_n)$，此处$m_i\in M_i$，组成的集合M，并在其中按坐标定义运算

$$(m_1, \cdots, m_n)+(m'_1, \cdots m'_n)$$
$$=(m_1+m'_1, \cdots, m_n+m'_n),$$
$$\alpha(m_1, \cdots, m_n)=(\alpha m_1, \cdots, \alpha m_n), \ \alpha\in K,$$
$$(m_1, \cdots, m_n)a=(m_1a, \cdots, m_na), \ a\in A.$$

显然，M成了A-模，称为模M_1，…，M_n的**直和，**记作$M_1\oplus\cdots\oplus M_n$或$\bigoplus\limits_{i=1}^{n} M_i$。作为向量空间$M$，它也是空间$M_1$，…，$M_n$的直和。

如果$n=2$，$\{e_1, \cdots, e_k\}$和$\{f_1,\cdots,f_l\}$分别是M_1和M_2中的一组基，易验$\{(e_1,0), \cdots, (e_k, 0), (0, f_1), \cdots, (0, f_l)\}$是$M_1\oplus M_2$的基，对应的表示形如(1)，此处$T_1(a)$和$T_2(a)$是对应于$M_1$和$M_2$的表示。

设M_1和M_2是非0模，同构于$M_1\oplus M_2$的模M称为**可分解模**。我们给出可分解模的内部特征。

设N和L是模M的两个子模．定义映射f：$N\oplus L\to M$，令$f(x,\ y)=x+y$，此处$x\in N$，$y\in L$．易验f是同态，$\mathrm{Im}f=L+N$．计算$\mathrm{Ker}f$．

若$(x,y)\in\mathrm{Ker}f$，则$x+y=0$，即$x=-y$．所以$x\in N\cap L$．反之，若$x\in N\cap L$，则模$N\oplus L$的元素$(x,\ -x)\in\mathrm{Ker}f$．也就是说，$\mathrm{Ker}f\simeq N\cap L$，从而推出下述命题．

命题6.1 设N、L是M的子模，由公式$f(x,\ y)=x+y$定义的同态f：$N\oplus L\to M$是一个同构，当且仅当$N+L=M$，而$N\cap L=0$．

如果这个条件满足，则称模M**分解成**自己的子模N与L的**直和**，记作$M=N\oplus L$．这时，子模L叫作N的**补子模**（N也叫L的补子模）．亦称子模N是模M的**直和项**．

M当中的一个子模可以有不同的补子模（甚至在$A=K$，模成为向量空间的最简单的情况下也是这样）．但是，一切补子模彼此同构，它们都同构于商模M/N．

命题6.2 下述条件等价：

1)子模N是模M的直和项，

2)存在同态p：$M\to N$，任取元素$x\in N$，都有$p(x)=x$，

3)存在同态i：$M/N\to M$，任取剩余类$y\in M/N$，都有$(y)\in y$．

证：1)⇒2) 若$M=N\oplus L$，则任取元素$m\in M$，可唯一地表作$m=x+y$，此处$x\in N$，$y\in L$，令$p(m)=x$．从元素表法的唯一性立得，$\forall m'\in M$，$\alpha\in K$，$a\in A$，都有$p(m+m')=p(m)+p(m')$，$p(\alpha m)=\alpha p(m)$，$p(ma)=p(m)a$即p是同态．如果$x\in N$，则$x=x+0$，从而$p(x)=x$．

2)⇒3) 按法则$i(\bar{m})=m-p(m)$规定i在剩余类$\bar{m}=m+N$的值。如果m'是这个类中的另一个元素，则 $m'=m+x$，此处$x\in N$，从而$m'-p(m')=m+x-p(m)-p(x)=m-p(m)$，即我们的定义不依赖于剩余类$\bar{m}$的代表元的选择。易验$i$是同态，并且因为$p(m)\in N$，所以$i(\bar{m})\in m+N=\bar{m}$。

3)⇒1) 记$L=\mathrm{Im}\,i$。由$i(\bar{m})\in\bar{m}=m+N$知，$m-i(\bar{m})\in N$，将m写成$m=(m-i(\bar{m}))+i(\bar{m})$，则有$N+L=M$。如果$x\in N\cap L$，则$x=i(y)$，此处$y=x+N=N$，即在$M/N$中，$y=0$，从而$x=0$。也就是说，$N\cap L=0$，所以$M=N\oplus L$。

同态p通常称为在子模N上的**投影**。与补子模一样，投影也不是唯一确定的。

多个模的直和同样有内部解释。

定理6.3 设$M_1,\cdots,M_k$是模M的子模，f：$M_1\oplus\cdots\oplus M_k\to M$是同态映射，由公式$f(m_1,\cdots,m_k)=m_1+m_2+\cdots+m_k$定义。则下述条件等价：

1) f是同构；

2) $M_1+\cdots+M_k=M$ 且$\forall_i$，$M_i\cap\left(\sum\limits_{j\neq i}M_j\right)=0$；

3) $M_1+\cdots+M_k=M$且$M_i\cap\left(\sum\limits_{j<i}M_j\right)=0$ 对任意 $i>1$ 成立。

证：1)⇒2) f是满同态，意味着 $M=M_1+\cdots+M_k$。若$x\in M_i\cap\left(\sum\limits_{j\neq i}M_j\right)$，则 $x=\sum\limits_{j\neq i}m_j, m_j\in M_j$. 令$m_i=-x$，得$f(m_1,\cdots,m_k)=0$，由于$f$是单同态，所以$m_1=\cdots=m_k=0$，

$x=0$。

2)⇒3) 显然。

3)⇒1) 从条件$M_1+\cdots+M_k=M$ 推出f满。进一步，若$f(m_1,\cdots,m_k)=0$，i是使$m_i\neq 0$的最大下标，则$m_i=-\sum_{j<i}m_j\in M_i\cap\left(\sum_{j<i}M_j\right)$，这是不可能的。所以$m_1=\cdots=m_k=0$，$f$是单射。

如果定理6.3的等价条件满足，则称模M**分解成**子模M_1，…，M_k的**直和**，记作$M=M_1\oplus\cdots\oplus M_k$。

直和的内外两种定义是等价的：若$M=M_1\oplus\cdots\oplus M_k$是外直和，则元素$(0,\cdots,0,m_i,0,\cdots,0)$（除第$i$个之外，其它坐标为0）的集合组成模$M$的子模$M'_i$，易验，$M'_i\simeq M_i$，$M=M'_1\oplus\cdots\oplus M'_k$（内直和）。

显然，任意（有限维）模都可以分解成不可分解的模的直和。在第三章中我们会看到，这样的分解是唯一的（直和项精确到同构，并不计它们的排列次序）。因此，如果知道了某一个代数A上的不可分解模，就可以写出全部A-模。但是，在许多情况下，描述不可分解模是一件非常困难的事情，有时用目前已知的方法难以做到。

§7 自同态 Peirce分解

在本节中，我们将证明一些基本的定理，它们建立了表示理论同代数结构理论之间的联系。这些结果在本书后面的

章节中有重要作用。

在§2，我们定义了模同态的运算，并对任意两个A-模M和N，建立了集合$\mathrm{Hom}_A(M, N)$，它可以看作域K上的向量空间。特别重要的是$M=N$的情况。这时$\mathrm{Hom}_A(M, M)$当中的同态可以相乘.这就意味着，向量空间$\mathrm{Hom}_A(M, M)$变成了K-代数。这个代数叫作模M的**自同态代数**，记作$E_A(M)$。其元素（M到自身的同态）称为M的**自同态**。这个代数的可逆元素，即M到M的同构叫作M的**自同构**。

我们来看上述概念对正则模给出什么结果。设$f: A\to M$是正则模到任意模M的同态。任取元素$a\in A$，$f(a)=f(1a)=f(1)a=m_0a$，$m_0=f(1)$是M当中的固定元素。反之，任取一个固定元素$m_0\in M$，令$f(a)=m_0a$，易验f：$A\to M$是同态映射。这样，我们就建立了M的元素与$\mathrm{Hom}_A(A, M)$中的同态之间的一一对应。如果f和g是两个这样的同态，并且$f(1)=m_0$，$g(1)=m_1$，则$(f+g)(1)=m_0+m_1$，且$\forall\alpha\in K$，$(\alpha f)(1)=\alpha m_0$。因此，我们的一一对应是向量空间之间的同构。

现设$M=A$，f和g是A的自同态，并且$f(1)=a$，$g(1)=b$。这时$(fg)(1)=f(g(1))=f(b)=f(1)b=ab$。所以，$A$与$E_A(A)$之间的这个一一对应是代数同构。

这就证明了下述定理。

定理7.1 对应$f\to f(1)$是向量空间$\mathrm{Hom}_A(A, M)$与M之间的同构。如果$M=A$，这个对应是代数$E_A(A)$与A的同构。

自同态代数是向量空间M的全体线性变换所成代数的子代数。它由与所有线性变换$T(a)$可交换的线性变换组成，

此处$a\in A$，T是模M定义的表示。这样，代数$E_A(M)$就与自身的忠实表示同时产生了（正确地说，这是一个反表示，因为我们约定将自同态写在元素的右边，而线性变换写在左边）。如果将A-模M的自同态记作$fm=f(m)$（f在元素$m\in M$上的值），我们就得到了相应于该反表示的一个左A-模。

这就是说，每一个A-模M都可以看成代数$E_A(M)$上的左模。容易验证，如果$M=A$是正则模，则代数$E_A(A)\simeq A$上的这个相应的左模就是左正则模。

类似的讨论对左模成立。这时，将左模的同态写在元素右边。m在同态f之下的像记作mf；乘积fg由公式$m(fg)=(mf)g$定义。在这样的记法下，左A-模变成了它本身的自同态代数的右模。也有类似于定理7.1的结果。

自同态代数的结构是怎样与模自身的结构，特别是模的直和分解联系起来的呢？

设M分解成子模的直和，$M=M_1\oplus\cdots\oplus M_s$。这就意味着，任意元素$m\in M$可以唯一地表成和式$m=m_1+\cdots+m_s$，$m_i\in M_i$。记$m_i=e_im$。从表法的唯一性立得$\forall m$，$n\in M$，$\alpha\in K, a\in A, e_i(m+n)=e_im+e_in$，$e_i(\alpha m)=\alpha e_i(m)$，$e_i(ma)=(e_im)a$，即$e_i$是$M$的自同态。此外，若$m\in M_i$，则$e_im=m$而当$j\neq i$时，$e_jm=0$，从而得$e_je_i=\delta_{ij}e_i$，此处$\delta_{ij}$是Kronecker符号（当$i=j$时，$\delta_{ij}=1$，$i\neq j$时$\delta_{ij}=0$）。最后，从$e_i$的定义知，$m=e_1m+\cdots+e_sm$，即$e_1+\cdots+e_s=1$。

代数A的元素e称为**幂等元**，如果$e^2=e$。若e、f是两个幂等元，且满足$ef=fe=0$，则称e、f为**正交幂等元**。等式$1=e_1+\cdots+e_s$，此处e_1，…，e_s是两两正交的幂等元，叫作代数A的**单位元分解**。

定理7.2 A-模M的直和分解，与代数$E = E_A(M)$的单位元分解之间存在着一一对应。

证：我们已经把模M的直和分解对应到了代数E的单位元分解。现在设$1 = e_1 + \cdots + e_s$是代数E的单位元分解。令$M_i = \mathrm{Im}e_i$。任取元素$m \in M$，有$m = (e_1 + \cdots + e_s)m = e_1m + \cdots + e_sm$，并且$e_im \in M_i$。如果$m = m_1 + \cdots + m_s$是元素$m$的另一种表达式，其中$m_i \in M_i$，则存在$x_i \in M$，使$m_i = e_ix_i$，根据幂等元$e_i$，$e_j$在$i \neq j$时的正交性知

$$e_im = \sum_{j=1}^{s} e_i m_j = \sum_{j=1}^{s} e_ie_jx_j = e_ix_i = m_i.$$

从而元素的表法是唯一的，即$M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_s$。

推论7.3 模M不可分解，当且仅当代数$E_A(M)$没有非平凡幂等元（异于0和1的幂等元）。

证：若e是非平凡幂等元，则$f = 1 - e$也是非平凡幂等元，且与e正交，这时$1 = e + f$是单位元分解。证毕。

比较定理7.1和7.2，得到下述推论。

推论7.4 模M的分解与代数$E_A(M)$上的正则模的分解之间存在着一一对应。

我们指出，如果$1 = e_1 + \cdots + e_s$是代数A的单位元分解，则相应的正则A-模的分解形如$A = e_1A \oplus \cdots \oplus e_sA$。这个分解叫作代数$A$的**右Peirce分解**。类似地可以定义**左Peirce分解**：$A = Ae_1 \oplus \cdots \oplus Ae_s$（这是左正则模的分解）。

不仅如此，对于任意A-模M，代数A的给定的单位元分解都可以诱导出向量空间M的分解，$M = Me_1 \oplus \cdots \oplus Me_s$。因为任取自同态$f \in E_A(M)$，$f(me_i) = (fm)e_i$，上述分解也是

M作为左$E_A(M)$-模的分解（但是，一般来说，它不是M作为A-模的分解）。我们称这个分解为**模M的Peirce分解**。

代数A的右Peirce分解的被加项e_iA是右理想，即A-模. 对它们应用模的Peirce分解，我们得到向量空间A的下述分解：

$$A = \bigoplus_{i,j=1}^{s} e_iAe_j. \tag{1}$$

这个分解叫作**双边Peirce分解**，或简称为代数A的**Peirce分解**。一般来说Peirce分量$A_{ij}=e_iAe_j$既非右理想，亦非左理想。但是，这个分解却可以将代数A的元素表示成某种矩阵形式。

设a和b是代数A的两个任意元素。将它们表成与Peirce分解(1)相应的和式：$a=\sum_{i,j} a_{ij}$，$b=\sum_{i,j} b_{ij}$，此处$a_{ij}=e_iae_j$，$b_{ij}=e_ibe_j$。这时$a+b=\sum_{i,j}(a_{ij}+b_{ij})$，而

$$ab=\sum_{i,k}\sum_{l,j} a_{ik}b_{lj} = \sum_{i,j}\Big(\sum_k a_{ik}b_{kj}\Big),$$

这是因为当$k\neq l$时，$a_{ik}b_{lj}=e_iae_ke_lbe_j=0$。这样，$e_i(ab)e_j=\sum_k a_{ik}b_{kj}$。这就提供了将元素$a$按其Peirce分量写成矩阵形式的可能性

$$a=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{ss} \end{pmatrix}, \qquad a_{ij}=e_iae_j\in A_{ij}. \tag{2}$$

正如刚才看到的，这时，元素的加法和乘法变成了通常定义的矩阵的加法和乘法。今后我们经常利用这种写法。特别地，将peirce分解（1）写成

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} \cdots & A_{1s} \\ \cdots \ \cdots & \cdots \\ A_{s1} \ \cdots & A_{ss} \end{pmatrix}.$$

设模M展成直和$M=M_1\oplus\cdots\oplus M_s$对$M$的自同态代数进行peirce分解。设$1=e_1+\cdots+e_s$是代数$E=E_A(M)$中对应的单位元分解。元素$f\in E$的peirce分解形如

$$f=\begin{pmatrix} f_{11} \cdots & f_{1s} \\ \cdots \ \cdots & \cdots \\ f_{s1} \ \cdots & f_{ss} \end{pmatrix}, \qquad f_{ij}=e_ife_j.$$

设$m=m_1+\cdots+m_s$是M的任意元素（$m_i=e_im$）.
则

$$fm=\sum_{i,\ j} e_ife_jm=\sum_{i,\ j} f_{ij}m_j,$$

即若将m表成元素m_1，…，m_s的列，则

$$fm=\begin{pmatrix} f_{11} \cdots & f_{1s} \\ \cdots \ \cdots & \cdots \\ f_{s1} \ \cdots & f_{ss} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_s \end{pmatrix},$$

此处乘法和前面一样按照通常的矩阵意义理解。

我们指出，$f_{ij}m$总是在M_i中。此外，因为$f_{ij}m=f_{ij}m_j$，$f_{ij}m$的值由分量$m_j=e_jm$唯一确定。所以f_{ij}可以自然地解释成$M_j\to M_i$的同态。反之，若g：$M_j\to M_i$是任意同态，可以由公式$\bar{g}m=gm_j$（此处$m_j=e_jm$）定义同态$\bar{g}$：$M\to M$，显然，$\bar{g}$在E_{ij}中。从而$E_{ij}\simeq\mathrm{Hom}_A$（$M_j$，$M_i$），我们可以在这一同

构之下将E_{ij}与$\mathrm{Hom}_A(M_j, M_i)$视为同一。

特别地，对于正则A-模，若$1=e_1+\cdots+e_s$是代数A的任意单位元分解，其Peirce分量$A_{ij}=e_iAe_j$总可以与$\mathrm{Hom}_A(e_jA, e_iA)$视为同一，并且这种同一与代数的元素的矩阵写法(2)是一致的。

最后引出一个有趣的结果，如果被加项M_1，…，M_s彼此同构：$M_1\simeq\cdots\simeq M_s\simeq L$。这时，我们写$M\simeq sL$。显然，$E_{ij}\simeq E_A(L)$，且自同态的矩阵写法导出下述结论。

定理7.5 若$M\simeq sL$，则代数$E_A(M)$同构于$E_A(L)$上的s阶全矩阵代数。

今后，将元素取自某个代数A的n阶全矩阵代数记作$M_n(A)$。

推论7.6 $M_n(A)\simeq E_A(nA)$。

我们在结束本节时考察一下幂等元与代数的直积之间的关系。

设$A=A_1\times\cdots\times A_k$，令$e_i=(0, \cdots, 1, \cdots, 0)$（在第$i$个位置上取代数$A_i$的单位元，而其余处取0）。显然，$e_1$，…，$e_k$是两两正交幂等元，且$1=e_1+\cdots+e_k$。此外，幂等元$e_i$还具有一个附加的性质，即它们都属于代数的中心，也就是说任取$a\in A$，$e_ia=ae_i$。

属于代数的中心的幂等元叫作**中心**幂等元。如果在单位元分解当中，所有的幂等元都是中心的，则分解本身称为**中心的**。

对任意单位元的中心分解$1=e_1+\cdots+e_k$，有$e_iA=Ae_i=e_iAe_i$，而当$i\neq j$时$e_iAe_j=e_ie_jA=0$。在这种情况下，右、左和双边Peirce分解重合，它们的分量是代数A的理想。

定理7.7 下述三者之间存在着一一对应：

1)代数A分解为代数的直积；

2)代数A的单位元的中心分解；

3)代数A 分解为理想的直和。

证：我们已经按照直积分解建立了单位元的中心分解，再按照它分解为理想的直和。

反之，设$A=I_1\oplus\cdots\oplus I_k$，此处$I_i$是理想，$1=e_1+\cdots+e_k$是对应的单位元分解。这时$I_i=e_iA$，所以任取元素$a\in A$，$e_iae_j\in I_i\cap I_j$，从而$e_iae_j=0$，即当$i\neq j$时，$e_iAe_j=0$，Peirce分解形如

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & A_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & A_k \end{pmatrix},$$

此处$A_i=e_iAe_i=e_iA$。这时$A\simeq A_1\times\cdots\times A_k$，定理得证。

推论7.8 代数A的直积分解与其中心的直积分解之间存在着一一对应。

从定理7.7的证明知，单位元分解$1=e_1+\cdots+e_s$是中心的，当且仅当$i\neq j$时，$e_iAe_j=0$。考虑到对自同态代数的Peirce分量的解释，我们得到了这样的结果。

推论7.9 如果$M=M_1\oplus\cdots\oplus M_s$，并且当$i\neq j$时$\mathrm{Hom}_A(M_i, M_j)=0$，则$E_A(M)\simeq E_A(M_1)\times\cdots\times(M_s)$。

习　题

1.分别计算复数域C和四元数代数H（在实数域上）的正则矩阵表示，C取基$\{1, i\}$，H取基$\{1, i, j, k\}$。

2. 利用正则表示证明，四元数代数是可除代数。

3. 设A是复数域上的代数，以$\{e, i, j, k\}$为基，其乘法表与四元数代数相同。在代数A中找出零因子。建立同构关系$A\simeq M_2(C)$。

4. 找出代数$M_n(K)$的中心和理想。

5. 计算Jordan代数$J_n(K)$的正则矩阵表示，找出它的全部理想。

6. 证明代数闭域上的任意独生代数同构于Jordan代数的直积。（提示：利用Cayley定理和矩阵的Jordan标准型）

7. 设M是n-元数组空间，把它看作上三角矩阵代数$A=T_n(K)$上的模（在相应的表示中，矩阵X对应到它自身）。

找出模M的子模及其对应的表示。在模M中建立合成列。证明模M不可分解。计算$E_A(M)$。

8. 如果$M_1, \cdots, M_k$是模M的子模，f：$M_1\oplus\cdots\oplus M_k\to M$是§6定义的自然同态，证明$\mathrm{Ker} f\simeq N_2\oplus\cdots\oplus N_k$，此处$N_i=M_i\cap\left(\sum\limits_{j<i} M_j\right)$。

9. 设M是代数A上的循环模，以m为生成元。证明$M\simeq A/\mathrm{A_{nn}}m$。如果$\mathrm{A_{nn}}m$是$A$的理想（例如当$A$交换时），验证$\mathrm{A_{nn}}m=\mathrm{A_{nn}}M$，且对任意生成元$m'$，$\mathrm{A_{nn}}m'=\mathrm{A_{nn}}m$。

证明，若代数A非交换，则$\mathrm{A_{nn}}m$可以由于生成元m的不同选择而互异（提示：将A取作$M_n(K)$，M取n-元数组空间）。

10.（理想的Peirce分解）。设I是代数A的理想，$1=e_1+\cdots+e_s$是A的单位元分解。证明元素$a=\sum\limits_{i,j} a_{ij}$

$(a_{ij}\in e_i Ae_j)$ 属于I，当且仅当$a_{ij}\in e_i Ie_j$。

11.利用习题10写出上三角矩阵代数的理想。

12.设A是代数，一般来说没有单位元，$\widetilde{A}$是把单位元并入A后得到的代数（看§1）。

$$\widetilde{A}=\{(a,c)\mid a\in A,c\in K\}.$$

$a)$证明，形如$(a,\ 0)$的元素组成$\widetilde{A}$的理想，它同构于A（作为没有单位元的代数）。

$b)$将命题$a)$中建立的理想与A视为同一，证明$\widetilde{A}$的全部理想包含在A中（右理想和左理想同样）。

$c)$如果A中有单位元，证明$\widetilde{A}\simeq A\times K$。

$d)$证明：任意没有单位元的代数的同态f：$A\to B$可唯一地延拓成有单位元的代数的同态$\widetilde{f}$：$\widetilde{A}\to\widetilde{B}$，反之，一切有单位元的代数的同态$g$：$\widetilde{A}\to\widetilde{B}$，将$A$映到$B$中。特别地，$A\simeq B$，当且仅当$\widetilde{A}\simeq\widetilde{B}$。

13.定义没有单位元的代数A的表示为同态f：$A\to E(V)$。

$a)$定义没有单位元的代数上的模，并建立模与表示之间的联系。

$b)$设A是没有单位元的代数，M是A上的模。令$m(a,c)=ma+cm(a\in A,\ c\in K)$。证明$M$变成$\widetilde{A}$-模。

$c)M$，N是任意A-模，若将其按照命题$b)$的定义看作$\widetilde{A}$模，验证$\mathrm{Hom}_A(M,\ N)=\mathrm{Hom}_{\widetilde{A}}(M,\ N)$。特别地，$A$-模$M=N$，当且仅当作为$\widetilde{A}$-模，$M\simeq N$。

第二章　半单代数

看来，半单代数的经典理论是一个最光彩的例子，说明《模论》方法是能给出深刻的结构定理的。同时半单代数及它们的表示在数学的许多部门中是起着重要作用的。在本章中我们将给出半单代数及其上的模的基本性质，并证明Wedderburn-Artin 定理，它给出这种代数的完全分类。在这里起重要作用的是第一章（特别是§7）中的结果以及刻划单模的同态的所谓Schur预理。

§1　Schur 预理

重提一下，一个非零模M被称为单的，如果其中没有非显然（即异于0和M的）子模。我们曾说明过它们在模论中的意义：任意模都可由单模经过一系列扩张而被得到．同时，单模在结构理论中也起着重要的作用，这在很大程度上取决于下述结果：

定理1.1(Schur)　若U和V是单A-模，则任一非零同态f: $U\to V$都是同构。

证：由于$\mathrm{Ker}f$和$\mathrm{Im}f$顺序为U和V的子模，并且若 $f\neq 0$，则$\mathrm{Ker}f\neq U$和$\mathrm{Im}f\neq 0$，因而$\mathrm{Ker}f=0$及$\mathrm{Im}f=V$，即f是单且满的同态，即是同构。

推论1.2(Schur)　单模的自同态代数是可除代数。

这是因为此代数的任意非零元素都是同构，因此是可逆的。

推论1.3 正则A-模是单的，当且仅当代数A是可除代数。

这是因为有同构关系$A\simeq E_A(A)$，以及在可除代数中没有非显然右理想。

顺便指出，Schur预理之逆命题是不成立的：存在有非单模M，其自同态代数$E_A(M)$是可除代数（参看第一章的习题7）。

§2 半单模和代数

模M叫作**半单的**，如果它同构于一些单模的直和。

半单模对应着**完全可约**表示，即是形如

$$T(a)=\begin{pmatrix} T_1(a) & & & 0 \\ & T_2(a) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & T_n(a) \end{pmatrix}$$

的表示T，其中T_i是既约表示。

命题2.1 下列条件互相等价：

1)模M是半单的；

2)$M=\sum_{i=1}^{m} M_i$，其中M_i是M的单子模；

3)任意子模$N\subset M$都有补子模；

4)任意单子模$N\subset M$都有补子模。

证：1)⇒2) 由定义便得。

2)⇒3) 若$M=\sum_{i=1}^{m} M_i$，则更有$M=N+\sum_{i=1}^{m} M_i$。这里指出，由模M_j的单性可得或者$M_j\cap\left(N+\sum_{i=1}^{j-1} M_i\right)=0$，或者$M_j\subset N+\sum_{i=1}^{j-1} M_i$。去掉所有满足$M_j\subset N+\sum_{i=1}^{j-1} M_i$的$M_j$后，我们得到这样一组子模$N_k$，它们满足条件

$$N+\sum_{k} N_k=M,$$

$$N_l\cap\left(N+\sum_{k<l} N_k\right)=0.$$

这样M便是子模N和N_k的直和(定理Ⅰ.6.3),而$N'=\sum_{k} N_k$是N的补子模。

3)⇒4) 是显然的。

4)⇒1) 这很容易对模M的长$l(M)$作归纳法而证得。若$l(M)=1$，则模M已是单的。设$l(M)>1$而U是M的单子模。此时有$M=U\oplus U'$，其中U'是U在M中的一个补子模，而$l(M)=l(U)+l(U')$，即$l(U')=l(M)-1$。若N是U'的单子模而N'是它在M中的补子模，则任意元素$x\in U'$可表成$x=n+n'$，其中$n\in N$，$n'\in N'$，由之得$n'=x-n\in N'\cap U'$，这样，$U'=N\oplus(N'\cap U')$，即是在U'中任一单子模都有补。由归纳假设得$U'\simeq\bigoplus_{i=2}^{n} U_i$。因此$M\simeq\bigoplus_{i=1}^{n} U_i$，其中$U_1=$

U.

推论2.2 半单模的任意子模和商模都是半单的。

证：设N是半单模M的子模，π：$M \to M/N$是M到商模上的投影。若$M=\sum_{i=1}^{m} M_i$，其中M_i是单模，则$M/N=\sum_{i=1}^{m}\pi(M_i)$。由于$\pi(M_i)$是$M_i$的商模，所以或者$\pi(M_i)=0$，或者$\pi(M_i)\simeq M_i$。因此，$M/N$是单模的和，故$M/N$是半单的。

子模N的半单性可如下推得：设N'是N在M中的补，则有$N\simeq M/N'$，由上知M/N'，随之N是半单的。

若M是半单模而$M=\bigoplus_{i=1}^{n} U_i$是其分解为单子模直和的一个分解式，则$M_j=\bigoplus_{i>j} U_i (i=0, 1, \cdots, n)$是$M$的子模，并且$M_{j-1}\supset M_j$，而$M_{j-1}/M_j\simeq U_j$。这样

$$M=M_0\supset M_1\supset\cdots\supset M_n=0$$

是M的一个组成列，而U_1，…，U_n是它的单因子。这时由Jordan-Hölder定理（Ⅰ.5.1）可得下面命题。

命题2.3 若M是半单模，$M\simeq U_1\oplus\cdots\oplus U_n\simeq V_1\oplus\cdots\oplus V_m$是$M$表成单模直和的两个分解式，则$n=m$且适当编号后对所有的$i$有$U_i\simeq V_i$。

代数A叫作**半单的**，如果它的正则模是半单的。正则右（左）A-模的单子模称作代数A的**极小右（左）理想**。

下面的预理与命题2.1一起使我们可以得到半单代数的

《内》刻划。

预理2.4(Brauer) 若I是代数A的一个极小右理想，则或者$I^2=0$或者$I=eA$，其中e是一个幂等元。

证：假设$I^2\neq 0$，即在I中有元素x，y，使得$xy\neq 0$。此时对应f：$I\to I$，$f(a)=xa$，是非零同态，又因为I是单模，此同态是同构（定理1.1）。因此存在元素$e\in I$使得$x=xe$。但此时有$xe=xe^2$，即$f(e)=f(e^2)$，故有$e=e^2$，即e是幂等元。最后，eA是I的非零子模，故$I=eA$。

代数A的右（左，双侧）理想I叫作**幂零的**，如果存在一个m使$I^m=0$。

推论2.5 下列条件彼此等价：

1)代数A是半单的；

2)A中任意右理想具有形状eA，其中e是幂等元；

3)A中任意非零理想含有非零幂等元；

4)代数A中没有非零的幂零理想；

5)代数A中没有非零的幂零右理想。

证：1)⇒2) 若I是右理想，则由命题2.1有$A=I\oplus I'$，其中I'是I的补。因此$I=eA$，其中$1=e+e'$是1的相应分解式（定理Ⅰ.7.2）。

2)⇒3) 是显然的。

3)⇒4) 这是因为若e是幂等元，则对任意k，$e^k=e\neq 0$。

4)⇒5) 若$I\neq 0$是幂零右理想，则AI是A中双侧理想，并且$(AI)^m=AI^m$，因此AI也是幂零的。

5)⇒1) 若I是正则模的单子模，即是代数A的极小右理想，则$I^2\neq 0$而依预理2.4，$I=eA$。因而I有补子模$I'=(1-e)A$。又依命题2.1，代数A是半单的。

应指出的是，推论2.5中条件3)和4)关于《右》《左》是对称的。因此《左半单》即是左正则模的半单性等价于半单性，并且对于推论2.5的条件可添加所有把其中《右》换成《左》所得到的条件。

上面得到的判断准则很容易转述成关于元素的术语。为此，把元素$a\in A$对应于右理想$aA=\{ax|x\in A\}$（这样的右理想叫作**主的**），并弄清一下，此右理想的幂零性意味着什么。$(aA)^m$中任一元素都是形如$ax_1ax_2\cdots ax_m$的元素之和，其中x_1，…，x_m是代数中任意元素。因此$(aA)^m=0$当且仅当所有这种形状的乘积为零。换言之，就是只要在乘积$a_1a_2\cdots a_l$中元素a出现m次时，此乘积必为零。这样的元素叫作**强幂零元**。

推论2.6 代数A是半单的，当且仅当在其中没有非零的强幂零元素。

推论2.7 交换代数A是半单的，当且仅当在其中没有非零的幂零元素（即这样的元素a，有$a^m=0$）。

这是因为，在交换代数中任一幂零元都是强幂零的

顺便指出，在非交换代数中可以有幂零元，它不是强幂零元。例如，在矩阵代数$M_2(K)$中矩阵单位e_{12}是幂零的：$e_{12}^2=0$，但$e_{21}e_{12}=e_{22}$是幂等元，因此，e_{12}不是强幂零元。

不难验证，在$M_2(K)$中，除0外没有强幂零元（建议读者去证明它）。

推论2.8 半单代数的中心是半单的。

这是因为，对于中心的元素来说显然幂零性和强幂零性是等价的。

最后，从我们的讨论可得下面关于半单性的重要判断准则，而已经是用表示论的术语了。

定理2.9 代数A是半单的，当且仅当它有一个忠实半单模[2]。

证：条件的必要性可由正则模是忠实的而直接得出。今证其充分性。

设$M=\bigoplus_{i=1}^{n} U_i$，其中$U_i$是单$A$-模，是忠实模。若$I\neq 0$是代数$A$的理想，则由模$M$的忠实性可得一$i$，使$U_iI\neq 0$。但此时必有$U_iI=U_i$，也就必有$U_iI^m=U_i$。因此，对任意$m$，$I^m\neq 0$。由推论2.5便得代数$A$的半单性。

§3 向量空间和矩阵

在讨论半单代数及其表示的一般理论以前，我们先讨论一下向量空间和可除代数上矩阵代数。

设D是域K上（有限维）可除代数，V是（有限维）左D-模。V叫作可除代数D上的（有限维）**向量空间**。

命题3.1 向量空间是半单模。任意单左D-模同构于正则模。

证：设V是D上向量空间，v_1是V中任意元素（向量）。把$x\in D$对应到$xv_1\in V$的同态对应$f:D\to V$是非零的，因而$\mathrm{Ker}f=0$（由于正则左D-模是单的）。因此$Dv_1=\mathrm{Im}f\simeq$

---

(2)再提一下，模M叫忠实的，如果相应的表示是忠实的，亦即$\mathrm{Ann}M=0$。

D.

若V是单模，则$V = Dv_1 \simeq D$. 不然的话可得一元素$v_2 \notin Dv_1$. 此时，同样有$Dv_2 \simeq D$，且$Dv_1 + Dv_2$严格包含Dv_1. 继续这一过程最后便得$V = \sum_{i=1}^{n} Dv_i$，其中$Dv_i \simeq D$是单模. 依命题2.1，V是半单模，这正是我们要证的.

推论3.2 可除代数D上任一向量空间同构于nD（n个正则模的直和）. 这里n是唯一确定的.

由于n是模V的长，故有唯一性. 通常称n为向量空间V的**维数**，记作$[V:D]$. 显然有$[V:K]=[V:D][D:K]$.

依推论 I. 7.6，可除代数D上n-维向量空间的自同态代数同构于D上矩阵代数$M_n(D)$. 此时空间V本身很自然地可看作是$M_n(D)$上的右模. 在下面我们将把V的元素和《数》向量$(x_1, \cdots, x_n)$，$x_i \in D$，等同起来. 此时矩阵对向量的运算就是向量和矩阵间的通常乘法.

命题3.3 代数$A = M_n(D)$上的模V是单的. 代数$M_n(D)$是半单的.

证：设U是V中的一个非零A-子模，$u=(u_1, \cdots, u_n)$是U中的一个非零元. 为了确定起见，假定$u_1 \neq 0$. 此时任意向量$x=(x_1, \cdots, x_n)$可以表成形状$x=uX$，其中

$$X = \begin{pmatrix} u_1^{-1}x_1 & u_1^{-1}x_2 & \cdots & u_1^{-1}x_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

因此$uA=V$，即A-模V是单的而依定理2.9，代数$Mn(D)$是

半单的。

今给出正则 A-模的一个具体分解。用 I_i 表示代数 $M_n(D)$ 的一个右理想，它是由一切形如

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

的（第 i 行可能是非零的）矩阵组成。令此矩阵对应元素 $(x_1, \cdots, x_n) \in V$，显然，我们得到 I_i 到 V 上的一个同构对应。

在以后我们将用 e_{ij} 表示矩阵单位，即是在 (i, j) 位置上是 1 其余都是零的矩阵。特别有 1 的分解式：$1 = e_{11} + \cdots + e_{nn}$，并且 $e_{ii}A = I_i$。由之得 $E_A(V) \simeq e_{ii}Ae_{ii} \simeq D$。

命题3.4 代数 $A = M_n(D)$ 上的任意模都是半单的。任意单 A-模同构于 V 而正则 A-模同构于 nV。

证： $A = I_1 \oplus \cdots \oplus I_n$ 是正则 A-模的分解式，并且还知道有 $I_i \simeq V$。如果 M 是任一 A-模，m 是它的一个非零元，则由于 I_i 是单的，mI_i 或是零模或同构于 I_i。此外，有 $m = \sum_{i=1}^{n} me_{ii} \in \sum_{i=1}^{n} mI_i$，故 mI_i 中必有非零者。若是模 M 本身是单的，则由上即得 $M = mI_i \simeq V$。不然的话，类似于命题3.1的证明我们可将 M 表成单子模的和。命题证毕。

推论3.5 代数 $M_n(D)$ 上两个模 M 和 N 是同构的，当且仅当 $[M:K] = [N:K]$。

证：若 $M=mV$ 而 $N=kV$，则 $[M:K]=m[V:K]$，而 $[N:K]=k[V:K]$，即得 $m=k$ 当且仅当 $[M:K]=[N:K]$。

命题3.6 代数 $A=Mn(D)$ 中没有异于 0 和 A 的理想。

证：设 I 是 A 中非零理想，$X=(x_{ij})$ 是 I 中非零矩阵，x_{kl} 是此矩阵中一个非零系数。此时 $e_{ik}X\neq 0$ 且在 $I_i\cap I$ 中。因此，$I_i\cap I\neq 0$，而由 I_i 之单性有 $I\supset I_i$（对所有的 i）。故有

$$I\supset\sum_{i=1}^{n}I_i=A,$$

这也就是要证的。

代数 A 叫作**单的**，如果它没有异于 0 和 A 的理想。命题3.6说明代数 $M_n(D)$ 是单的。在下一节中我们将看到，再没有其他（有限维）单代数了。

§4 Wedderburn-Artin定理

第一章§7和第二章上几节中的结果使得我们可以得到关于半单代数的基本结构定理。

首先由 Schur 预理可直接得到关于交换半单代数的刻划。

定理4.1 (Weierstrass-Dedekind) 交换半单代数同构于域的直积。反之，域的直积是半单代数。

证：设 A 是交换半单代数，$A=U_1\oplus\cdots\oplus U_n$ 是正则 A-模表成单模直和的一个分解式，$1=e_1+\cdots+e_n$ 是单位元的相应分解。由于交换性所有幂等元都是中心的。此时有 $A\simeq A_1\times\cdots\times A_n$，其中 $A_i=e_iA\simeq E_A(U_i)$（参看定理Ⅰ.7.7）。依 Schur 预理 A_i 是可除代数，又因为它们是交换的，故是域。

反之，若$A\simeq A_1\times\cdots\times A_n$，其中$A_i$是域，则正则$A$-模具有形状$A=U_1\oplus\cdots\oplus U_n$，其中$U_i$是正则$A_i$-模，它是单的。

推论4.2 若域K是代数闭的，则任意交换半单K-代数同构于K^n。

把Schur预理和自同态的矩阵记法结合起来便得一般的结构定理。

定理4.3（Wedderburn-Artin） 任意半单代数同构于可除代数上矩阵代数的直积。反之，可除代数上矩阵代数的直积是半单代数。

证： 设A是半单代数，$A\simeq n_1U_1\oplus\cdots\oplus n_sU_s$是正则$A$-模表成单模直和的分解式，且当$i\neq j$时，$U_i\not\simeq U_j$。令$n_iU_i=M_i$，我们有$A\simeq M_1\oplus\cdots\oplus M_s$，且依定理1.1，$\mathrm{Hom}_A(U_i,U_j)=0$，而这说明也有$\mathrm{Hom}_A(M_i,M_j)=0$。这样$A\simeq A_1\times\cdots\times A_s$，其中$A_i=E_A(M_i)$（参看推论Ⅰ.7.9）。因为$M_i\simeq n_iU_i$，则由定理Ⅰ.7.5得$A_i\simeq M_{n_i}(D_i)$，其中$D_i=E_A(U_i)$是可除代数。

推论4.4（Молин） 若域K是代数闭的，任意半单K-代数同构于形如$M_{n_1}(K)\times\cdots\times M_{n_s}(K)$的代数。

推论4.5 任意单K-代数同构于形如$M_n(D)$的代数，其中D是可除代数。

证： 我们已经看到了，$Mn(D)$是单代数．反之，若代数A是单的，则其唯一的非零理想（就是A本身）含有非零幂等元1，故代数A是半单的（依推论2.5）．此外A不能分解成直积。故$A\simeq M_n(D)$。

推论4.6 任意代数闭域K上的单代数必同构于$M_n(K)$·

§5 分解的唯一性

Wedderburn-Artin 定理把每一个半单代数A和一个集（D_1，…，D_s；n_1，…，n_s）对应起来，其中D_i是可除代数而n_i是矩阵的阶数：

$$A \simeq M_{n_1}(D_1) \times \cdots \times M_{n_s}(D_s). \qquad (1)$$

很自然地要问：可除代数D_i和阶数n_i是唯一确定的吗？我们将证明确是这样。此外，分解(1)本身实际上也是唯一确定的。

首先给出关于代数分解成直积的一个一般结果。

定理5.1 设$A \simeq A_1 \times \cdots \times A_s \simeq B_1 \times \cdots \times B_t$是代数$A$的两个直积分解，其中$A_i$，$B_i$是不可分解代数，$1 = e_1 + \cdots + e_s = f_1 + \cdots + f_t$是单位元的相应的中心分解。此时必$s = t$并对幂等元适当编号后，对所有的$i$有$e_i = f_i$。

证： 由定理Ⅰ.7.7，$A_i \simeq e_i A$和$B_j \simeq f_j B$的不可分解性意味着，如果$e_i = e'_i + e''_i$，$f_j = f'_j + f''_j$，其中e'_i和e''_i（相应地f'_j和f''_j）是中心正交幂等元，则或者$e'_i = 0$或者$e''_i = 0$（相应地或者$f'_j = 0$或者$f''_j = 0$）。但由于e_i和f_j属于中心，故$e_i f_j$和$e_i - e_i f_j$是中心正交幂等元。因此或者$e_i f_j = 0$或者$e_i f_j = e_i$。类似地有或者$e_i f_j = 0$或者$e_i f_j = f_j$。因为$e_i = e_i(f_1 + \cdots + f_t)$，故可得一足码$j$使得$e_i f_j \neq 0$，即是$e_i = e_i f_j = f_j$。但这样的足码只能有一个，因为当$k \neq j$时$e_i f_k = f_j f_k = 0$。由之便得$s = t$，且在适当编号后对所有的$i$有$e_i = f_i$。这时有$A_i \simeq e_i A = f_i A \simeq B_i$。

现在我们可证明 Wedderburn-Artin 定理中的唯一性

了。

定理5.2 若$A\simeq M_{n_1}(D_1)\times\cdots\times M_{n_s}(D_s)\simeq M_{k_1}(F_1)\times\cdots\times M_{k_t}(F_t)$，其中$D_1$，…，$D_s$，$F_1$，…，$F_t$是可除代数，则$s=t$且适当编号后对所有的$i$，$n_i=k_i$及$D_i\simeq F_i$。

证： 由于在代数$M_n(D)$中没有真理想，故它是不可分解的。因此由定理5.1立刻得到$s=t$以及适当编号后$M_{n_i}(D_i)\simeq M_{k_i}(F_i)$。剩下来要证的是，若$A\simeq M_n(D)\simeq M_k(F)$，其中$D$和$F$是可除代数，则$n=k$且$D\simeq F$。

依命题3.4，A有一个单模V，并且$A\simeq nV\simeq kV$，由之便有$n=k$。此外，$D\simeq E_A(V)\simeq F$，这就结束了定理的证明。

单代数$A_i=M_{n_i}(D_i)$叫作半单代数A的**单分量**。由定理5.2它们是唯一确定的。因此半单代数的分类就完全归结为对有限维可除代数的刻划。

§6 半单代数的表示

Wedderburn-Artin结构定理连同§3中结果一起使得我们能给出关于半单代数上的模的刻划。

命题6.1 设M是代数$A=A_1\times\cdots\times A_s$上的模，$1=e_1+\cdots+e_s$是代数$A$的单位元的中心分解。此时必$M=\bigoplus_{i=1}^{s}Me_i$，其中$Me_i$是$A_i$上的模。

证： Me_i是M的子模，因为e_i在A的中心内。其次有$m=me_1+\cdots+me_n$，此外，如果$m=m_1+\cdots+m_s$，其中$m_i\in Me_i$，则有$me_i=m_i$，亦即这个表示法是唯一的。随之$M=$

$\bigoplus_{i=1}^{s} Me_i$。但当 $i \neq j$ 时，$Me_ie_j = 0$，因此 $e_jA \subset A_{nn}(Me_i)$，即是说 Me_i 可看作是 $A/\bigoplus_{j\neq i} e_jA \simeq A_i$ 上的模，这也就是要证的。

定理6.2 设 A 是半单代数，$A_i \simeq Mn_i(D_i)$ 是它的单分量（$i = 1$，…，s）。任意 A-模都是半单的并且可唯一地表成形状 $\bigoplus_{i=1}^{s} k_iV_i$，其中 V_i 是单 A_i-模。特别，单 A-模和代数 A 的单分量之间有一个一一对应关系。

证：由命题6.1，任意 A-模可分解成直和 $M_1 \oplus \cdots \oplus M_s$，其中 M_i 已经是 A_i-模。依命题 3.4，$M_i \simeq k_iV_i$，这就证明了定理（由命题 2.3 可得分解的唯一性）。

这个定理的下述推论在群表示论中起着重要的作用。

推论6.3 设 A 是特征零的域上的半单代数，而 S，T 是它的两个表示。这两个表示是等价的当且仅当对任意 $a \in A$ 有 $\mathrm{tr}T(a) = \mathrm{tr}S(a)$ (3)。

证：如果表示 T 和 S 等价，则矩阵 $T(a)$ 和 $S(a)$ 是相似的，因而有相同的迹。

反之，假设对所有的 $a \in A$，$\mathrm{tr}T(a) = \mathrm{tr}S(a)$。设 $A = A_1 \times \cdots \times A_s$，其中 A_i 是 A 的单分量，而 $1 = e_1 + \cdots + e_s$ 是单位元的中心分解，V_i 是单 A_i-模。将相应于表示 T 和 S 的模 M 和 N 分解之：

---

(3) $\mathrm{tr}X$ 表示矩阵 X 的迹：若 $X = (x_{ij})$，则 $\mathrm{tr}X = x_{11} + \cdots + x_{nn}$。

$$M \simeq \bigoplus_{i=1}^{s} m_i V_i, \quad N \simeq \bigoplus_{i=1}^{s} k_i V_i.$$

若$v \in V_i$，则 $ve_i = v$，而当 $j \neq i$ 时，$ve_j = 0$，由之得$\mathrm{tr}T(e_i) = m_i d_i$ 而$\mathrm{tr}S(e_i) = k_i d_i$，其中$d_i = [V_i:K]$。因此由迹的相等可得对所有$i$有$m_i = k_i$，即$M \simeq N$，故表示$T$和$S$等价[4]。

定理6.2还使我们能够计算半单代数 A 上模的自同态代数。为此回顾一下，若V_i 是代数$A_i = Mn_i(D_i)$（代数A的单分量）上的单模，则知$E_A(V_i) \simeq D_i$。此外，依Schur 预理，$\mathrm{Hom}_A(V_i, V_j) = 0, i \neq j$ 。因此，自同态的矩阵记法就给出下面结果。

定理6.4 若M是半单代数A上的模，则代数 $E_A(M)$也是半单的。精确些说，如果$M = \bigoplus_{i=1}^{s} k_i V_i$，其中$V_i$ 是代数A的单分量$A_i = Mn_i(D_i)$上的单模，则$E_A(M) \simeq E_1 \times \cdots \times E_s$，其中 $E_i \simeq Mk_i(D_i)$。

半单代数A和 B 叫作是**同型的**，如果它们的单分量的个数相同，而相应的可除代数是彼此同构的。

推论6.5 代数A和B是同型的，当且仅当 $B \simeq E_A(M)$，其中M是忠实A-模。

其证明可由定理6.4以及下述事实得出：模$M = \bigoplus_{i=1}^{s} k_i V_i$的忠实性意味着，对所有的 i，$k_i > 0$。

推论6.6 若 M 是任意代数 A 上的一个半单模，则 $E_A(M)$是半单代数。

(4)由证明可看出，只需要求对于中心的元素其迹相等就够了。

实际上，$E_A(M)=E_{\overline{A}}(M)$，其中$\overline{A}=A/\mathrm{Ann}M$。但$M$是忠实$\overline{A}$-模，因此$\overline{A}$，随之还有$E_{\overline{A}}(M)$就都是半单代数（定理2.9）。

最后，我们由所得到的结果导出对于半单模的所谓**稠密定理**。

定理6.7（Burnside） 设M是一个代数A上的半单模，$B=E_A(M)$，$\overline{A}=E_B(M)$（这里把M看成是左B-模）。每一个元素$a\in A$决定一个自同态$\overline{a}\in\overline{A}$：$x\overline{a}=xa$。此时对应$a\to\overline{a}$是代数$A$到$\overline{A}$的一个满同态。

证：我们可以用代数$A/\mathrm{Ann}M$去代替A，这样作不会变动B和$\overline{A}$。故可认定M是忠实A-模。此时代数A是半单的（依定理2.9）。在这种情形由$a\neq0$可得$\overline{a}\neq0$，而需要验证的是，如上所建立的对应是同构。

设$A=A_1\times\cdots\times A_s$，其中$A_i\simeq Mn_i(D_i)$，而$M=\bigoplus\limits_{i=1}^{s}k_iV_i$，

其中V_i是单A_i-模。此时$B=B_1\times\cdots\times B_s$，其中$B_i\simeq Mk_i(D_i)$，并且相应的单位元的分解式$1=e_1+\cdots+e_s$可保证有$e_iM=k_iV_i$。记单$B_i$-模为$U_i$。这时有$e_iM\simeq m_iU_i$（作为$B$-模）。但$[V_i:K]=n_id_i$，其中$d_i=[D_i:K]$，而$[U_i:K]=k_id_i$。因此$[e_iM:K]=k_in_id_i=m_ik_id_i$，由之得$m_i=n_i$，$\overline{A}=E_B(M)\simeq A$而单射$A\to\overline{A}$必是同构对应。

推论6.8 若U是单A-模，$D=E_A(U)$是其自同态可除代数，而$[U:D]=n$，则A有一个同构于$M_n(D)$的商代数。

其证明可由定理6.7以及关于同态的定理直接得到。

习　题

1. 证明：代数闭域上交换代数的既约表示是一维的。

2. 设K是代数闭域，A是代数$M_n(K)$的交换半单子代数。证明存在一个矩阵S，使得对所有矩阵$X\in A$，SXS^{-1}是对角线矩阵。（代数B的两个子代数A和A'叫作**共轭的**，如果在B中有一个可逆元b，使得对任意$a\in A$，$bab^{-1}\in A'$，并且任意元素$a'\in A$都具有这样形状。习题2说明子代数$A\subset M_n(K)$和对角线矩阵代数的一个子代数共轭）

3. 在什么条件下独生代数是半单的？

4. 设K是代数闭域。证明矩阵$X\in M_n(K)$与某个对角线矩阵共轭当且仅当矩阵X生成的独生子代数是半单的。

5. 设G是n阶循环群。证明，群代数KG是半单的当且仅当域K的特征不整除n。

6. 证明，交换代数是半单的当且仅当它的任意独生子代数都是半单的。

7. 刻划任意独生子代数都是半单代数的代数。

8. 刻划没有幂零元的代数。

9. 证明，代数$M_n(D)$中任一非零幂等元必共轭于元素$\sum\limits_{i=1}^{k}e_{ii}$，其中$k$介于1与$n$之间。

10. 设X和Y是代数$A=M_n(K)$中的两个矩阵，$XA=\{XS|S\in A\}$，$YA=\{YS|S\in A\}$。显然XA和YA是右理想。作为A-模何时它们同构？

11. 证明，代数$M_n(K)$中的同构单子代数必互相共轭。

12. 证明，如果代数A是半单的，则左正则模的长等于

正则模的长（对非半单代数一般说这是不成立的）。

13. 设A是特征0的域K上的半单代数，T和S是它的两个有相同维数的表示，并且对任意元素$a\in A$可得一矩阵C_a，使得$C_aT(a)C_a^{-1}=S(a)$。证明，表示T和S是等价的[5]。

---

(5)此习题是A.B.Ройтер给出的。

第三章　根

定理Ⅱ.4.3（Wedderburn-Artin）和Ⅱ.6.2完全刻划了半单代数以及它们的表示，然而，即使域K是代数闭的，关于非半单代数及其上模的结构也是知道得很少。在非半单代数的理论中占有重要地位的是根的概念，根是一个理想，关于它的商代数是半单的，并且是有此性质的理想中的一个极小者。根的重要性质是它的幂零性，此性质使得对于模根来提升幂等元成为可行的。同时很自然地出现一个重要的模类——投射模，它们和半单模之间存在着一个一一对应，利用它可以证明投射模分解成不可分解模时的唯一性，而借助自同态代数又可将这个结果推广到任意模上去。最后，我们在本章的最末一节引入**代数的格式**和**格式的泛代数**等概念，并利用它们至少在代数闭域的情形[6]可得到关于非半单代数的某些（当然，远不是完全的）刻划，特别是由之可得所谓**继承代数**（仍是在代数闭域上）的分类。

再提醒一下，如果没有特别说明，所有代数都是有限维的（在§6讨论格式的泛代数时将遇到无限维代数）。

§1　模的根和代数的根

(6)在第八章中这些概念将被推广到任意代数上去，但要求它们关于根的商代数是分离的。

设M是半单模：$M=\bigoplus_{i=1}^{s}U_i$，其中U_i是单模而π_i是M到U_i上的投影。此时对任意非0元素$m\in M$，至少有一个足码i使得$\pi_i(m)\neq 0$，这可说成是从M到一切可能的单模的所有同态能够"区分"模M的元素。不难验证，反过来也对，即若M到所有单模的同态集能够"区分"模M的元素，则M必是半单的。这是因为，若N是M的极小子模，$n\in N$，是非零元素，则有一个同态对应f：$M\to U$，其中U是单模，使得$f(n)\neq 0$。但这时由于N的极小性有$N\cap \mathrm{Ker}f=0$。另一方面$\mathrm{Im}f=U$，即$M/\mathrm{Ker}f\simeq U$而$\mathrm{Ker}f$是M的极大子模。因此$N+\mathrm{Ker}f=M$，而$\mathrm{Ker}f$是N在M中的补。随之，M是半单模（参看命题Ⅱ.2.1）。

对于任意模M我们引入《非半单性的度量》：一切具有下面性质的元素$m\in M$的集合：对于任意由M到单模的同态对应f言都有$f(m)=0$。显然，这些元素组成M的一个子模，称之为**模M的根**，记作$\mathrm{rad}M$。

由于对于任意非零同态$f:M\to U$，U是单模，$\mathrm{Ker}f$是M中的一个极大子模，并且反过来，任一M中极大子模M'是投影$\pi:M\to M/M'$的核而M/M'是单模，故根是模M中所有极大子模之交。

定理1.1 模M是半单的当且仅当$\mathrm{rad}M=0$。商模$M/\mathrm{rad}M$永远是半单的。

证：上面我们已经证过第一个结论。因此只要验证一下$\mathrm{rad}(M/\mathrm{rad}M)=0$。依定理Ⅰ.4.3 $M/\mathrm{rad}M$的极大子模形如$M'/\mathrm{rad}M$，其中M'是M的极大子模（因为永远有$M'\supset\mathrm{rad}M$）。显然有

$$\bigcap(M'/\mathrm{rad}M)=(\bigcap M')/\mathrm{rad}M=0$$

即$\mathrm{rad}(M/\mathrm{rad}M)=0$。定理证完。

命题1.2 $\mathrm{rad}\left(\bigoplus_{i=1}^{s}M_i\right)=\bigoplus_{i=1}^{s}\mathrm{rad}M_i$。

证：设$M=\bigoplus_{i=1}^{s}M_i$，$f:M\to U$是一个同态对应。易见f由同态$f_i:M_i\to U$的全体依公式

$$f(m_1,\ \cdots,\ m_s)=\sum_{i=1}^{s}f_i(m_i)$$

唯一确定（参看第一章§7）。因此若对所有i，$m_i\in\mathrm{rad}M_i$，则$f(m_1,\ \cdots,\ m_s)=0$且$(m_1,\ \cdots,\ m_s)\in\mathrm{rad}M$。

反过来，若$(m_1,\ \cdots,\ m_s)\in\mathrm{rad}M$，则来考察所具有下面性质的同态对应$f:M\to U$，即当$j\neq i$时$f_j=0$，由之可知，对任意同态对应$f_i:M_i\to U$，必有$f_i(m_i)=0$。因而$m_i\in\mathrm{rad}M_i$，这正是我们要证明的。

命题1.3 对于模的任意同态对应$f:M\to N$，有$f(\mathrm{rad}M)\subset\mathrm{rad}N$。

证：若$m\in\mathrm{rad}M$，则对任意同态对应$g:N\to U$，U是单模，有$gf(m)=0$，即$f(m)\in\mathrm{rad}N$。

这个结果使得我们可以由任意同态对应$f:M\to N$去构造导出同态$\tilde{f}:M/\mathrm{rad}M\to N/\mathrm{rad}N$，令$\tilde{f}(m+\mathrm{rad}M)=f(m)+\mathrm{rad}N$。

预理1.4（Nakayama） 同态对应$f:M\to N$是满的，当且仅当它所导出的同态对应$\tilde{f}:M/\mathrm{rad}M\to N/\mathrm{rad}N$是满的。

证：若 f 是满同态，则当然 $\tilde{f}$ 也是。反过来，$\tilde{f}$ 的满性意味着 $\mathrm{Im}f+\mathrm{rad}N=N$。假定 $\mathrm{Im}f\neq N$，则 $\mathrm{Im}f$ 含在某个极大子模 N' 中。由于 $\mathrm{rad}N\subset N'$，故 $\mathrm{Im}f+\mathrm{rad}N\subset N'$ 而不能等于 N。此矛盾说明必 $\mathrm{Im}f=N$，即 f 是满同态。

这样，只要在《模根》的情况下去验证同态的满性就足够了。有时此结果的另一种形式是有益的。

推论1.5 若 N 和 L 是 M 中子模，并且 $N+L=M$ 而 $N\subset \mathrm{rad}M$，则 $L=M$。

证明留给读者。

代数 A 的正则模的根叫作**代数A的根**。由定理1.1便得，代数 A 的半单性和 $\mathrm{rad}A=0$ 是等价的。

定理1.6 对于任意 A-模 M，$\mathrm{rad}M=MR$，这里 $R=\mathrm{rad}A$。特别，代数的根是双侧理想而关于根的商代数是半单的。

证：取 M 中的一个固定元素 m 而令任意元素 $a\in A$ 对应于 ma，这样得到一个同态对应 $A\to M$（参看 Ⅰ.7.1）。依命题1.3，它把根带到根中，即 $mR\subset \mathrm{rad}M$。因此 $MR\subset \mathrm{rad}M$。

特别，$AR\subset R$，即 R 是双侧理想，而依定理1.1，商代数 $A/R=\overline{A}$ 是半单的。

考察商模 $\overline{M}=M/MR$。此模被根 R 零化，故可把它看成 $\overline{A}$-模，依定理Ⅱ.6.2，它是半单模。随之对于任意非零剩余类 $\overline{m}=m+MR$ 可得一个同态对应 $f:\overline{M}\to U$，U 是单模，使得 $f(\overline{m})\neq 0$。作 f 和投影 $\pi:M\to\overline{M}$ 的乘积，得 $f\pi:M\to U$，有 $f\pi(m)\neq 0$，即 $m\notin \mathrm{rad}M$。由之得 $\mathrm{rad}M\subset MR$。定理证

完。

顺便指出，实际上我们证明了，$MR=\mathrm{rad}M$是 M 中使商模为半单的一个极小子模。

推论1.7 任意半单A-模是半单商代数$\overline{A}=A/\mathrm{rad}A$ 上的模。特别，单A-模的个数等于代数$\overline{A}$的单分量的个数。

推论1.8 代数的根是一切极大理想之交。

证：若I是代数A 的极大理想，则 A/I 是单代数，因之也是半单A-模，故（A/I）$R=0$，即$R\subset I$且 I/R 是商代数$\overline{A}=A/R$的极大理想（定理 I .4.7）。用J表示代数 A 的所有极大理想之交。这样$J\supset R$且J/R是代数$\overline{A}$的极大理想之交。但$\overline{A}$是半单代数，故$J/R=0$，即$J=R$。

推论1.8给出根的对称特征（和《左》《右》概念无关.）故由之得左正则模的根和代数的根重合。

命题1.9 代数A的根R是幂零理想，并且包含一切幂零右理想。

证：由定理1.6和Nakayama 预理（推论1.5）可得，如果 $R\neq 0$，则 $R^2=\mathrm{rad}R\neq R$，或更一般地，若 $R^m\neq 0$，则 $R^{m+1}=\mathrm{rad}R^m\neq R^m$。但子空间链 $R\supset R^2\supset\cdots\supset R^m\supset R^{m+1}\supset\cdots$必要中断，故有个 m 使 $R^m=0$。

反过来，若I是幂零右理想，则$(I+R)/R$是半单代数A/R中的幂零右理想。此时依推论 II 2.5，$(I+R)/R=0$，即$I+R=R$。

推论1.10 代数的根是一切强幂零元素的集。

根的一个重要性质涉及下面的概念。代数A的右（左）

理想叫**拟正则的**，如果对任意元素 $x\in I$，$1-x$ 都是可逆元。

命题1.11 根是拟正则理想且包含所有右和左拟正则理想。

证：若 $x\in R$，则有一 k 使 $x^k=0$，而此时 $(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^{k-1})=1-x^k=1$，即 $1-x$ 是可逆的。反之，设 $I\not\subset R$，这里 I 是随便一个右理想。此时必有一极大右理想 M，$I\not\subset M$。因此 $I+M=A$。特别，$1=x+m$，$x\in I$，$m\in M$。但 $m=1-x$ 不是可逆元，因为 $mA\neq A$。即 I 不是拟正则的。

这样，在有限维代数中幂零性和拟正则性是一致的。

推论1.12 任意右（左）诣零理想（指其每一元素都是幂零的）含在根中，因而是幂零的。

证：若 I 是右诣零理想，则所有元素 $1-x(x\in I)$ 都是可逆的：若 $x^m=0$，则 $(1-x)(1+x+\cdots+x^{m-1})=1$。

下面我们将常用到根的另一个特征。

命题1.13 代数 A 的根 R 是唯一的诣零理想，A 关于它的商代数是半单的。

证：上面已证过，根是有这样性质的。反过来，由代数 A/I 是半单的可得 $I\supset \mathrm{rad}A$，而由 I 是诣零理想，得 $I\subset \mathrm{rad}A$。

推论1.14 设 $R=\mathrm{rad}A$，则有 $\mathrm{rad}(A/I)=(R+I)/I$。

证：由 R 的幂零性得 $(R+I)/I$ 的幂零性。另一方面 $(A/I)/((R+I)/I)\simeq A/(R+I)\simeq(A/R)/(R/(R+I))$。但 A/R 是半单代数，故其任意商代数也是半单的。即 $(R+I)/I=\mathrm{rad}(A/I)$。

§2 幂等元的提升 主模

根的幂零性给出研究非半单代数的一个有力的方法：**模根地提升幂等元。**

预理2.1 设I是代数A的幂零理想，u是代数A中的一个元素，有$u^2\equiv u(\bmod I)$。此时A中必有一个幂等元e，有$e\equiv u(\bmod I)$。

证：设$v=u+r-2ur$，其中$r=u^2-u$。这样$ur=ru$，$r^2\in I^2$，因此，$v^2\equiv u^2+2ur-4u^2r\equiv u+r+2ur-4ur\equiv v(\bmod I^2)$。另外，显然有$v\equiv u(\bmod I)$。对元素$v$同样地去作，我们可得元素$v_1$，使$v_1^2\equiv v_1(\bmod I^4)$且$v_1\equiv v(\bmod I^2)$。这样也有$v_1\equiv u(\bmod I)$。继续这一过程，并注意到理想$I$的幂零性，我们便得要求的幂等元$e$。

由预理2.1很容易地得到对于其正则模为不可分解模的代数的刻划。

定理2.2 下列条件等价：

1)正则A-模是不可分解的；

2)A/R是可除代数（$R=\mathrm{rad}A$）；

3)A中有唯一极大右理想；

4)代数A的非可逆元组成右理想[7]。

证：1)⇒2) 条件1)意味着在代数$E_A(A)=A$中没有非显然幂等元（推论Ⅰ.7.3）。此时由预理2.1知，它们

(7)由于条件2)是对称的，故在条件1)，3)，4)中可将所有右模和右理想换成左的。

在半单代数 A/R 中也不会出现。这样，显然知A/R是可除代数。

2)⇒4) 若A/R是可除代数且元素 $a\in A$ 不在 R 中，剩余类 $a+R$ 在 A/R 是可逆的，即存在元素$b\in A$，使得$ab\equiv 1 \pmod R$。这时，由命题1.11，元素ab是可逆的，因而a也是可逆的。因为根中所有元素都不可逆，故R恰是一切不可逆元的全体，这就证明了4)。

4)⇒3) 设 I 是由代数 A 中一切非可逆元组成的理想。这时任意右理想$J\neq A$都含在I中，因为在 J 中不可能有可逆元，故I是唯一的极大右理想。

3)⇒1) 这可由如下的讨论而得：如果一个模 M 是可分解的，$M=N\oplus L$，其中$N\neq 0$，$L\neq 0$，则在 M 中至少有两个极大子模$N'\oplus L$ 和$N\oplus L'$，这里 N' 和L'顺序为N和L的极大子模。

称满足定理 2.2 中条件的代数为**局部的**。

由 I .7.4得下面结果。

推论2.3 (Fitting) 一个模是不可分解的，当且仅当其自同态代数是局部代数。

今把所得结果应用于正则模的直和项上。同构于正则模的不可分解直和项的模叫作**主不可分解模**，或简称为**主模**。换一种说法，主A-模具有形状eA，其中e是**本原幂等元**，指它没有形如$e=e'+e''$的分解，其中 e'，e'' 是非零正交幂等元。依推论2.3，这等价于代数 $E_A(eAe)\simeq eAe$ 的局部性。

命题2.4 $\mathrm{rad}(eAe)=eRe$。幂等元 $e\in A$是本原的，当且仅当代数$\overline{A}=A/R(R=\mathrm{rad}A)$的幂等元$\bar{e}=e+R$ 是本原的。

证：显然，eRe 是 eAe 的理想，由R的幂零性还知它是幂零的。另一方面，$eAe/eRe \simeq \bar{e}\bar{A}\bar{e}$ 是半单代数。依命题1.13，$eRe = \mathrm{rad}(eAe)$。这样可由定理 2.2得出第二结论，因为$\bar{e}$是本原的当且仅当$\bar{e}\bar{A}\bar{e}$是可除代数。

推论2.5 主模含有一个唯一的极大子模。

证：若eA是主模，则$\bar{e} = e + R$是本原幂等元，而此时，$\bar{e}\bar{A} \simeq eA/eR$ 是单模，因而 eR 是 eA 的极大子模。但由定理1.6，$eR = \mathrm{rad}(eA)$含于所有极大子模内，故它是 eA中唯一的极大子模。

命题2.6 若$f: eA \to M$是 A- 模间的一个同态，则 $f(e) \in Me$。若令同态 f 对应于元素 $f(e)$，便得向量空间之间的同构对应：$\mathrm{Hom}_A(eA, M) \simeq Me$。

证：$f(e) = f(e^2) = f(e)e \in Me$，并且如果 $f(e) = g(e)$，则对任意$a \in A$有 $f(ea) = f(e)a = g(e)a = g(ea)$，即 $f = g$，而对应 $\mathrm{Hom}_A(eA, M) \to Me$ 是单射。另一方面，令 a 对应 ma，我们得同态对应：$A \to M$。如果把它限制在 eA 上，便得同态对应$f: eA \to M$，它将e映到 me，即对应 $\mathrm{Hom}_A(eA, M) \to Me$ 是满射。

推论2.7 对于任意同态$f: eA \to M$和任意满同态$g: N \to M$必存在一个同态对应$\varphi: eA \to N$，使得 $f = g\varphi$。

证：设$f(e) = me$而 n 是 m 在 N 中的一个原像。此时可把φ取成把e映到ne的同态对应 $eA \to N$。

推论2.8 若模M只有一个极大子模，则M必同构于一个主模的商模。

证：设M'是M的唯一极大子模。此时 $M' = MR$，而 M/MR是单模，即有代数 $\bar{A} = A/R$的一个本原幂等元$\bar{e}$，使得

$M/MR\simeq\bar{e}\bar{A}$。但依预理2.1存在幂等元 e 使 $\bar{e}=e+R$，再依命题 2.4，e 是本原幂等元，还有 $\bar{e}\bar{A}\simeq eA/eR$。用 π 表示 M 到 $\bar{e}\bar{A}$ 上的投射，f 表示 eA 到 $\bar{e}\bar{A}$ 上的投射。由推论2.7知，必存在同态 $\varphi:eA\to M$，使 $\pi\varphi=f$，并且导出同态 $\tilde{\varphi}$：$eA/eR\to M/MR$ 是同构。由Nakayama预理（预理1.4）φ 是满同态并有 $M\simeq eA/\mathrm{Ker}\varphi$。

推论2.9 主模 eA 和 fA 同构，当且仅当单模 $\bar{e}\bar{A}$ 和 $\bar{f}\bar{A}$ ($\bar{A}=A/R$，$\bar{a}=a+R$)是同构的。

证：若 $eA\simeq fA$，则 $\bar{e}\bar{A}\simeq eA/eR\simeq fA/fR\simeq\bar{f}\bar{A}$。反之，设 $\bar{e}\bar{A}\simeq\bar{f}\bar{A}$。把此同构对应和射影 $eA\to\bar{e}\bar{A}$ 连接起来便得满同态对应 $g:eA\to\bar{f}\bar{A}$。由推论2.7，$g=\pi\varphi$，其中 φ 是 $eA\to fA$ 的同态，而 π 是射影 $fA\to\bar{f}\bar{A}$。由于 φ 导出同构对应 $\bar{e}\bar{A}\simeq\bar{f}\bar{A}$，故它是满射（依预理1.4）。类似地可作出满同态 $\psi:fA\to eA$.这样 $\varphi\psi$ 和 $\psi\varphi$ 都是满同态，因而是同构(因为 eA 和 fA 是有限维空间）。因此，φ 和 ψ 也是同构对应。定理证完。

这样，在主模和单模之间建立了一个自然的一一对应。附带说一下，类似的结果对左模也成立。但在半单代数 $\bar{A}$ 中，易见，$\bar{e}\bar{A}\simeq\bar{f}\bar{A}$ 当且仅当 $\bar{A}\bar{e}\simeq\bar{A}\bar{f}$（这两个的意义都是指 $\bar{e}$ 和 $\bar{f}$ 是属于同一单分量中）。因此我们有

推论2.10 主左模 Ae 和 Af 同构，当且仅当模 eA 和 fA 是同构的。

§3 投射模 投射覆盖

推论 2.7 说明了主模的一个非常重要的性质——它们的

投射性.

代数A上的模P叫作**投射模**，如果对任意满同态对应$g:M\to N$以及任一同态对应$f:P\to N$，必有同态对应$\varphi:P\to M$，使$f=g\varphi$。这时，我们说**f可提升到φ**，或者说，**φ是f到M上的提升.**

命题3.1 投射模P和Q同构，当且仅当半单模$\bar{P}=P/PR$和$\bar{Q}=Q/QR$是同构的（$R=\operatorname{rad}A$）.

证：任意同构$P\simeq Q$当然导出同构$\bar{P}\simeq\bar{Q}$。反之，如果$\bar{P}\simeq\bar{Q}$，则存在满同态$f:P\to\bar{Q}$，而它可以提升到同态$\varphi:P\to Q$（因为P是投射模），并且依Nakayama预理φ是满同态。平行地可得满同态$\psi:Q\to P$。这时比较一下维数便得φ和ψ是同构对应。

命题3.2 一些模的直和是投射模，当且仅当每一直和项是投射模。

证：任意一个同态$f:P\oplus Q\to N$可唯一地由一对同态$f_1:P\to N$和$f_2:Q\to N$给出：$f(p,q)=f_1(p)+f_2(q)$，并且，设$g:M\to N$是满同态，则方程$f=g\varphi$的解$\varphi:P\to M$将由方程$f_1=g\varphi_1$和$f_2=g\varphi_2$的解$\varphi_1:P\to M$和$\varphi_2:Q\to N$给出。这样，f可以提升当且仅当每一个同态对应f_1，f_2能够提升，这就证明了命题。

自由模是投射模的重要例子之一。**自由模**指同构于正则模的直和之模，即是具有形状nA的模，其中n是某个自然数。自由模的元素可以看成是系数取自A的《向量》而按坐标进行运算。数n称作自由模的秩。

命题3.3 每一同态$f:nA\to M$均可由模M中任意一个元素集$\{m_1,\cdots,m_n\}$依等式

$$f(a_1, \cdots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} m_i a_i \qquad (1)$$

而唯一确定。这样，$\mathrm{Hom}_A(nA, M) \simeq nM$。

证：容易验证，对任意给定的$m_1, \cdots, m_n$，由等式(1)所定义的对应$f: nA \to M$是同态。反之，若f是$nA \to M$的一个同态，设$u_i = (0, \cdots, 1, \cdots, 0)$（1在第$i$位置上），$m_i = f(u_i)$。由于$(a_1, \cdots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} u_i a_i$，故

$$f(a_1, \cdots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} f(u_i) a_i = \sum_{i=1}^{n} m_i a_i.$$ 命题证完。

模M的子集$\{m_1, \cdots, m_n\}$叫作**生成元系**，如果任意元素$m \in M$可表成形如$m = \sum_{i=1}^{n} m_i a_i$，其中$a_i \in A$，换言之，这就是说由式（1）所确定的同态$f: nA \to M$是满的。由同态定理便有

推论3.4 若模M有一n元生成元系，则M同构于n秩自由模的商模。

这里提一下，有限维模M永远有有限生成元系（例如，它的任意基就是）。一切可能的生成元系所含元素的最小个数叫作M的**秩**，记作$\mu_A(M)$。

和主模一样，自由模也是投射模（依命题3.2）。下面定理给出自由模、主模和投射模之间的联系。

定理3.5 下列条件等价：

1)模P是投射模；

2）P同构于一些主模的直和；

3）P同构于自由模的直和项；

4）任意满同态$f: M \to P$的核在M中有补子模（此时显然有$M \simeq P \oplus \mathrm{Ker} f$）．

证：由命题3.2可得 2）⇒1）和 3）⇒1）。

由推论3.4得4）⇒3）。

1）⇒4） 存在有同态 $\varphi: P \to M$，使 $f\varphi = 1$，而依命题Ⅰ.6.2这等价于$\mathrm{Ker}\, f$有补子模。

1）⇒2） 把半单模 $\bar{P} = P/PR$ 分解成单模的直和：$\bar{P} = U_1 \oplus \cdots \oplus U_t$，而对每一$U_i$ 选取一主模 P_i，使得$P_i/P_iR \simeq U_i$。令 $Q = \bigoplus_{i=1}^{t} P_i$。这样$Q$是投射模且 $Q/QR \simeq P/PR$。随之 $P \simeq Q$（依命题3.1），而这就是我们要证的。

这样看来，和主模与单模之间的关系类似，投射模和半单模之间也有一个一一对应。

定理3.6 令投射模P对应于半单模$\bar{P} = P/PR$，这就确立了投射模和半单模之间的一一对应关系。若$P = P_1 \oplus \cdots \oplus P_n = Q_1 \oplus \cdots \oplus Q_m$是投射模$P$表成主模直和的两个分解式，则$n = m$且适当编号时，对所有$i$有$P_i \simeq Q_i$。

证：由于有命题3.1，故只需验证一下任意半单模 M 同构于P/PR，其中P是投射模。为此，只需要 M 展成单模的直和：$M = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$，而令 $P = P_1 \oplus \cdots \oplus P_n$，其中 P_i 是满足条件 $U_i \simeq P_i/P_iR$ 的主模。

若是$P_1 \oplus \cdots \oplus P_n \simeq Q_1 \oplus \cdots \oplus Q_m$，其中$P_i$，$Q_j$ 是主模，则模根后便得 $\bar{P}_1 \oplus \cdots \oplus \bar{P}_n \simeq \bar{Q}_1 \oplus \cdots \oplus \bar{Q}_m$（$\bar{P}_i = P_i/P_iR$，$\bar{Q}_j = Q_j/Q_jR$），并且 $\bar{P}_i$，$\bar{Q}_j$ 是单模。由命题Ⅱ.2.3知 $n = m$，

且对所有i（适当编号时）有$\bar{P}_i \simeq \bar{Q}_i$。

由推论3.4知，任意模都同构于投射模的商模。当然，一个给定模M表成投射模的商模P/N时可以有许多不同方法。但是，我们将证明，存在一个在某种意义下极小的这样的表示，且它是唯一的。

投射模P叫作模M的**投射覆盖**并记作$P(M)$，如果存在一个能导出同构对应$P/\mathrm{rad}P \simeq M/\mathrm{rad}M$的满同态$f: P \to M$。显然这等价于$M \simeq P/N$，其中$N \subset \mathrm{rad}P$。

定理3.7 1)任意模M都有在同构下唯一的一个投射覆盖。

2)$P(M) \simeq P(\overline{M})$，其中$\overline{M} = M/\mathrm{rad}M$。

3)若g是投射模Q到模M上的满同态，则$Q \simeq P_1 \oplus P_2$，其中$P_1 \simeq P(M)$，局限在P_1上的g是满的，而$P_2 \subseteq \mathrm{Ker}g$。除此之外，还可选取同构对应$P(M) \simeq P_1$，使得它和满同态$g$接续起来恰是固定的满同态$f: P(M) \to M$。

证：依定理3.6，有一投射模P使$\overline{M} \simeq P/\mathrm{rad}P$。此时可把满同态提升到同态$f: P \to M$，并且依Nakayama预理$f$是满的，即得$P$是$M$的投射覆盖，这就证明了1)和2)（唯一性由命题3.1即得）。

今设Q是任意一个投射模，而$g: Q \to M$是满同态。我们可把g提升到同态$\varphi: Q \to P$，并有$f\varphi = g$。此时导出对应$\bar{\varphi}$: $Q/\mathrm{rad}Q \to P/\mathrm{rad}P$是满同态，再由Nakayama预理$\varphi$也是满同态。依定理3.5，$Q = P_1 \oplus \mathrm{Ker}\varphi$，其中$P_1 \simeq P$。但$P_2 = \mathrm{Ker}\varphi \subset \mathrm{Ker}g$，这就证得结论3)。

推论3.8 $P(M \oplus N) = P(M) \oplus P(N)$。

证明是显然的。

推论3.9*) 设$R=\mathrm{rad}A$，$\bar{A}=A/R$，$1=\bar{e}_1+\cdots+\bar{e}_n$是代数$\bar{A}$的单位元的分解式．此时必存在代数$A$的单位元的分解式$1=e_1+\cdots+e_n$，使得$\bar{e}_i=e_i+R$．

证：显然$A=P(\bar{A})$．另一方面，如果$U_i=\bar{e}_i\bar{A}$，而$P_i=P(U_i)$，则$P(\bar{A})\simeq P_1\oplus\cdots\oplus P_n$，随之，$A\simeq P_1\oplus\cdots\oplus P_n$，并且可选择此同构对应，使之把它和自然满同态$P_1\oplus\cdots\oplus P_n\to U_1\oplus\cdots\oplus U_n=\bar{A}$连接起来时恰是投射$\pi:A\to\bar{A}$．设$1=e_1+\cdots+e_n$是代数$A$的单位元的一个分解，它是相应于正则模$A$的分解式$A\simeq P_1\oplus\cdots\oplus P_n$的．这时$e_iA/e_iR=\bar{e}_i\overline{A}$，这就是说幂等元$e_i+R$的全体给出单位元的一个分解式，它相应于分解式$\overline{A}=\bar{e}_1\overline{A}\oplus\cdots\oplus e_n\overline{A}$．由于在单位元的分解和模的分解之间有一一对应关系（定理Ⅰ.7.2），故$e_i+R=\bar{e}_i$，这正是我们要证的．

在本节最后，我们应用所得结果去研究一类代数．

代数A叫作**准素的**，如果$A/\mathrm{rad}A$是单代数．

定理3.10 下列条件等价：

---

*）利用下面命题可得此推论的一个直接而简单的证明．

命题 设$R=\mathrm{rad}A$，而$\overline{A}=A/R$．设$\overline{A}$中任一幂等元可模R提升（预理2.1说这是成立的），则对$\overline{A}$中任意有限个正交幂等元$\overline{e}_1,\cdots,\overline{e}_k$，必存在$A$中正交幂等元$f_1,\cdots,f_k$，使得$\overline{f_i}=\overline{e_i}$，$i=1,2,\cdots,k$．

证：对k作归纳法．设已有A中正交幂等元$f_1,\cdots,f_{k-1}$使得$\overline{f_i}=\overline{e_i}$．设$f=f_1+\cdots+f_{k-1}$，则$f$是幂等元且$\overline{f}\,\overline{e_k}=\overline{e_k}\,\overline{f}=\overline{0}$．依假设存在幂等元$g\in A$使得$\overline{g}=\overline{e_k}$．此时易见有$gf\in R$，因而$1-gf$是可逆元．令$f_k=(1-f)(1-gf)^{-1}g(1-f)$，直接验证可知$f_1,\cdots,f_{k-1}$，$f_k$即为所求者．命题证完．

——译者注

1）代数A是准素的；

2）A只有一个极大理想；

3）代数A的任意真理想都是幂零的；

4）代数A只有一个单模；

5）代数A只有一个主模；

6）$A\simeq M_n(B)$，其中B是局部代数。

证：按格式3）⇒2）⇒1）⇒4）⇒5）⇒6）⇒1）⇒3）去证。

3）⇒2） 若所有真理想都是幂零的，则它们都含在$R=\mathrm{rad}A$中（命题1.9），故R是唯一的极大理想。

2）⇒1） 可由推论1.8得出。由推论1.7得1）⇒4）。由推论2.9得4）⇒5）。

5）⇒6） 设P是A的唯一主模，则正则模A同构于nP，由之$A\simeq E_A(A)\simeq M_n(B)$，其中$B=E_A(P)$是局部代数（依推论2.3）。

6）⇒1） 设$A=M_n(B)$。今证$\mathrm{rad}A=M_n(J)$，其中$J=\mathrm{rad}B$。这是因为$M_n(J)$是A的幂零理想且由于B/J是可除代数，还知$A/M_n(J)\simeq M_n(B/J)$是单代数.因此，$M_n(J)$是$\mathrm{rad}A$（依命题1.13）而A是准素的。

1）⇒3） 若I是代数A的一个理想，则$(I+R)/R$是单代数A/R的理想，由之或者$(I+R)/R=0$，即是$I\subset R$，或者$(I+R)/R=A/R$，即是$I+R=A$，再由Nakayama预理知$I=A$。这样，若$I\neq A$，则$I\subset R$，因而I是幂零的。

想指出的是，在我们证明6）⇒1）时，实际上也顺便得到了下面的

命题3.11 $\mathrm{rad}M_n(B)=M_n(\mathrm{rad}B)$。

§4 Krull-Шмидт定理

由定理3.6作为推论，可得正则模表成不可分解模的直和的唯一性。在本节中，利用第一章§7中结果将把此结果推广到任意模上去。首先把它用幂等元语言表达出来。

定理4.1 设$1=e_1+\cdots+e_n=f_1+\cdots+f_m$是代数$A$的单位元的两个分解式，并且$e_i$和$f_i$都是本原的。此时必有$n=m$，且在代数$A$中有可逆元素$a$，使得在适当编号后，对所有的$i$有$f_i=ae_ia^{-1}$。

证： $A=e_1A\oplus\cdots\oplus e_nA=f_1A\oplus\cdots\oplus f_mA$是正则模$A$表成主模直和的两个分解式。依定理3.6，$n=m$且对所有$i$（适当编号时）$e_iA\simeq f_iA$。但同构对应$e_iA\xrightarrow{\sim}f_iA$可由某个元素$a_i\in f_iAe_i$实现，且有$f_ia_i=a_ie_i=a_i$。设$a=a_1+\cdots+a_n$，此时对所有的$i$有$ae_i=a_ie_i=a_i$和$f_ia=f_ia_i=a_i$。今证$a$是可逆的。为此我们选取元素$b_i\in e_iAf_i$，它所实现的同构对应$f_iA\xrightarrow{\sim}e_iA$与$a_i$所实现的同构对应互逆，并令$b=b_1+\cdots b_n$。由于$a_ib_i=f_i$，而$e_ib=b_i=bf_i$，故有$ab=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=\sum_{i=1}^{n}f_i=1$和$b=a^{-1}$。因而，由等式$ae_i=f_ia$得$f_i=ae_ia^{-1}$。定理证完。

现在欲证分解的唯一性，只要对自同态代数应用一下定理4.1就够了。

定理4.2（Krull-Шмидт） 若$M=M_1\oplus\cdots\oplus M_n=N\oplus\cdots\oplus N_m$是模$M$表成不可分解模的直和之两个分解式，则$n=m$且适当编号时对所有的$i$有$M_i\simeq N_i$。

证： 依定理Ⅰ.7.2，模M的这两个表成不可分解模之

直和的分解式对应着代数 $E=E_A(M)$ 的单位元的分解式：$1=e_1+\cdots+e_n=f_1+\cdots+f_m$，此处$e_i$和$f_i$是本原幂等元，且有$M_i=e_iM$和$N_j=f_jM$。依定理4.1，$n=m$且适当编号时有$f_i=ae_ia^{-1}$，其中 a 是代数E的可逆元，也就是模 M 的自同构。令a_i为a在M_i上的局限。由于$ae_i=f_ia$，故 $ae_i(m)\in f_iM=N_i$，即是a_i把M_i映入N_i。因为a是单射，故 a_i 也是单射。另一方面，a是满同态，因此N_i 中任意元素 y 具有形状 $y=a(x)$。所以这样就有 $y=f_i(y)=f_ia(x)=ae_i(x)$ 以 及 $e_i(x)\in M_i$，即 a_i 是 M_i 到 N_i 上的满同态，因而是同构。定理证完。

§5　自同态代数的根

今应用所得结果去阐明在Peirce分解中根的状况。

预理5.1　设$f:M\to N$是不可分解A-模之间的同态，则或者f是同构，或者对任意同态 $g:N\to M$，有$fg\in \mathrm{rad}E_A(N)$和$gf\in\mathrm{rad}E_A(M)$。

证：设 $g\in\mathrm{Hom}_A(N,M)$ 但 $gf\notin \mathrm{rad}_A(N)$。此时由于$E_A(N)$是局部代数（推论2.3），故 fg 是可逆元，即是 N 的自同构，因而f是满同态。令 $\varphi=(fg)^{-1}$，则 $f(g\varphi)=1$，而由命题Ⅰ.6.2，有 $M\simeq N\oplus \mathrm{Ker}f$。再由 M 的不可分解性知$\mathrm{Ker}f=0$，即f是单同态，总起来便知 f 是同构。类似地可得，若$gf\notin\mathrm{rad}E_A(M)$，则 f 是同构。

定理5.2　设$M=M_1\oplus\cdots\oplus M_s$，其中$M_i\simeq n_iN_i$，模$N_i$都是不可分解的，且当$i\neq j$时$N_i\not\simeq N_j$。令$E_{ij}=\mathrm{Hom}_A(M_j,M_i)$，并设代数$E=E_A(M)$的双侧Peirce分解为

$$E=\begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & \cdots & E_{1s} \\ E_{21} & E_{22} & \cdots & E_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ E_{s1} & E_{s2} & \cdots & E_{ss} \end{pmatrix}.$$

这时代数E的根R具有形状

$$R=\begin{pmatrix} R_{11} & E_{12} & \cdots & E_{1s} \\ E_{21} & R_{22} & \cdots & E_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ E_{s1} & E_{s2} & \cdots & R_{ss} \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

其中 $R_{ii}=\mathrm{rad}E_{ii}$。换言之，如果 $1=e_1+\cdots+e_s$ 是代数E的单位元的相应分解，则 $e_iRe_j=e_iEe_j$，$i\neq j$ 以及 $e_iRe_i=\mathrm{rad}e_iEe_i$。

证：按照第一章§7，元素E_{ij}可以看作是系数取自$H_{ij}=\mathrm{Hom}_A(N_j,N_i)$的 $n_i\times n_j$ 矩阵。因此，$R_{ii}=Mn_i(R_i)$，其中 $R_i=\mathrm{rad}E_A(N_i)$（参看命题3.11）。而由预理5.1得，当$i\neq j$时，有 $E_{ij}E_{ji}\subset R_{ii}$ 因此，由式（1）所定义的集R是E的理想，并且$E/R\simeq E_{11}/R_{11}\times\cdots\times E_{ss}/R_{ss}$是半单代数，因而$R\supset\mathrm{rad}E$。

另一方面，考虑右理想（R的第i行）

$$I_i=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ E_{i1} & E_{i2} & \cdots & R_{ii} & \cdots & E_{is} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

今证它的幂零性。事实上

$$I_i^2=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ R_{ii}E_{i1} & \cdots & R_{ii}^2 & \cdots & R_{ii}E_{is} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

一般地，有

$$I_i^{k+1}=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ R_{ii}^kE_{i1} & \cdots & R_{ii}^{k+1} & \cdots & R_{ii}^kE_{is} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

且有k使$R_{ii}^k=0$。这说明，$I_i^{k+1}=0$。因此，$I_i\subset\mathrm{rad}E$。故$R=I_1+\cdots+I_s\subset\mathrm{rad}E$，这就证明了定理。

把定理5.2应用到代数$A\simeq E_A(A)$上，便得

定理5.3 设$1=e_1+\cdots+e_s$是代数A的单位元的一个分解，并且幂等元$\bar{e}_i=e_i+R$属于商代数$\overline{A}=A/R$的中心，这里$R=\mathrm{rad}A$。这时，当$i\neq j$时有$e_iRe_j=e_iAe_j$以及$e_iRe_i=\mathrm{rad}(e_iAe_i)$。

证：由于$\bar{e}_i$是中心幂等元，故A-模$\bar{e}_i\overline{A}$和$\bar{e}_j\overline{A}$，$i\neq j$，没有同构的单直和项。这样，依推论2.9，在e_iA和e_jA中没有同构的主直和项再由定理5.2得，$e_iAe_j=\mathrm{Hom}_A(e_jA,e_iA)\subset\mathrm{rad}A$。依命题2.4 $\mathrm{rad}(e_iAe_i)=e_iRe_i$，由之即得定理的结论。

现在我们引入一类代数，它在有限维代数的理论中起着重要的作用。

定理5.4 下列条件等价：

1）商代数$\overline{A}=A/R$同构于可除代数的直积，此处$R=$

rad$A$;

2）若$A=P_1\oplus\cdots\oplus P_S$是正则模$A$表成主模直和的一个分解，则$P_i\not\simeq P_j$，$i\neq j$；

3）存在有代数B和B-模M，使得$A\simeq E_B(M)$且$M=M_1\oplus\cdots\oplus M_S$，其中$M_i$是不可分解模且$M_i\not\simeq M_j$当$i\neq j$时。

证：1)⇒2) 若$A\simeq\overline{D_1}\times\cdots\times D_S$，其中$D_i$是可除代数，则依推论3.9，$A\simeq P_1\oplus\cdots\oplus P_S$，并且$P_i/P_iR\simeq U_i$，此处$U_i$是单$D_i$-模。这样$P_i$是主模，又因为当$i\neq j$时$U_i\not\simeq U_j$，故还有$P_i\not\simeq P_j$，当$i\neq j$时。

2)⇒3) 可由定理Ⅰ.7.1得出，为此只需令$B=A$，而把M取作正则A-模。

3)⇒1) 可直接由定理5.2得到。

满足定理5.4中条件的代数叫作**简约代数**。

设A是任意代数，$A\simeq n_1P_1\oplus\cdots\oplus n_sP_S$是正则$A$-模表成主模直和的分解，且当$i\neq j$时$P_i\not\simeq P_j$。令$P=P_1\oplus\cdots\oplus P_S$，$B=E_A(P)$，此时$B$是简约代数，称之为代数$A$的**基代数**.设$1=e_1+\cdots+e_s$是代数$B$的单位元的分解，它相应于模$P$的上述分解，则我们将称，主$B$-模$Q_i=e_iB$**相应于**主$A$-模$P_i$，而投射$B$-模$Q=k_1Q_1\oplus\cdots\oplus k_sQ_S$**相应于**投射$A$-模$P=k_1P_1\oplus\cdots\oplus k_sP_S$。

预理5.5 若B是代数A的基代数，Q_1,Q_2是投射B-模，它们相应于投射A-模P_1，P_2，则$\mathrm{Hom}_B(Q_1,Q_2)\simeq\mathrm{Hom}_A(P_1,P_2)$。

证：利用第一章§7中引入的自同态的矩阵记法，证明可归结为去验证同构$\mathrm{Hom}_B(Q_j,Q_i)\simeq Hom_A(P_j,P_i)$，其中$Q_i$是主$B$-模，它们相应于主$A$-模$P_i$。但是无论是$\mathrm{Hom}_B(Q_j,$

Q_i)还是$\mathrm{Hom}_A(P_j, P_i)$都等同于e_iBe_j，这就证明了本预理。

定理5.6 下列条件等价：

1）代数A_1和A_2的基代数彼此同构；

2）$A_2 \simeq E_{A_1}(P)$，其中P是投射A_1-模，并且所有主A_1-模都作为直和项出现在P中；

3）$A_2 \simeq E_{A_1}(P_1)$且$A_1 \simeq E_{A_2}(P_2)$，其中P_i是投射A_i-模($i=1,2$)。

证： 1)⇒2) 设B是代数A_1, A_2的共同基代数，Q是投射B-模，相应于正则A_2-模，P是投射A_1-模，相应于Q. 这时所有主B-模作为直和项都在Q中出现。这意味着所有主A_1-模在P中出现而依预理5.5有 $A_2 \simeq E_{A_2}(A_2) \simeq E_B(Q) \simeq E_{A_1}(P)$。

应指出的是，由于条件1）是对称的，我们在上面同时也就证明了1)⇒3)。

2)⇒1) 设$P = k_1P_1 \oplus \cdots \oplus k_sP_s$，其中$P_1, \cdots, P_s$是所有彼此不同构的主$A_1$-模，$A_2 = E_{A_1}(P)$。由定理5.2得

$$A_2/\mathrm{rad}A_2 \simeq M_{k_1}(D_1) \times \cdots \times M_{k_s}(D_S),$$

其中$D_i \simeq B_i/\mathrm{rad}B_i$而$B_i = E_{A_1}(P_i)$。因此$A_2$有$s$个单模，这说明，它也有$s$个主模$P_1{}' \cdots, P_s{}'$（推论2.9），并且和在预理5.5中一样，易证$\mathrm{Hom}_{A_2}(P_j{}', P_i{}') \simeq \mathrm{Hom}_{A_1}(P_j, P_i)$。这样便有$E_{A_2}(P_1{}' \oplus \cdots \oplus P_S{}') \simeq E_{A_1}(P_1 \oplus \cdots \oplus P_S)$，而这正是要证的。

3)⇒2) 若$A_2 \simeq E_{A_1}(P_1)$，其中$P_1 = k_1Q_1 \oplus \cdots \oplus k_sQ_S$，而$Q_i$是彼此不同构的主$A_1$-模，则由定理5.2得，$A_2$有$s$个单模，因而也有$s$个主模。同样地，若$A_1 \simeq E_{A_2}(P_2)$，其中$P_2 = m_1Q_1{}' \oplus \cdots \oplus m_tQ_t{}'$，而$Q_i{}'$是彼此不同构的主$A_2$-模，

则A_1有t个主模．由之得$s\leqslant t$和$t\leqslant s$，即$s=t$并且$Q_1,\cdots,Q_s$是所有的主A_1-模．

满足定理5.6中条件的代数A_1，A_2称作是**同型代数**．显然，对于半单代数言，这个概念和曾在第二章§6中引入的是一致的．

推论5.7 任一代数A必同构于一个简约代数B上投射模P的自同态代数．代数B（在同构意义下）唯一确定并同构于代数A的基代数*．

值得提一下的是，一般言，模P不是唯一确定的（参看本章习题16）．

§6 代数的格式

上面所得结果指出研究非半单代数结构的一个路子，注意到推论5.7，此时我们可只考虑简约代数．

设$P_1,\cdots,P_s$是代数A上所有彼此不同构的主模（依命题2.9，它们的总数等于代数$\bar{A}=A/R$的单分量的个数，这里$R=\mathrm{rad}A$）．令$R_i=P_iR$，$V_i=R_i/R_iR$．V_i是半单模，故有$V_i\simeq\bigoplus\limits_{j=1}^{s}t_{ij}U_j$，其中$U_j=P_j/R_j$都是单模（由于定理3.7，这等价于同构对应$P(R_i)\simeq\bigoplus\limits_{j=1}^{s}t_{ij}P_j$）．对应每一模$P_i$在平面上标上一个点，缀以号码$i$，并由点$i$到点$j$连接$t_{ij}$条射线．这些点和射线的总体叫作**代数A的格式**并记作$S(A)$．

---

* 代数B不是唯一的．例如取A＝K，K是域．则A是简约代数A＝$E_A(A)$．又令B＝K×K，它也是简约代数，A≃$E_B(A)$．——译者注

考虑左模时可以类似地去定义**代数的左格式**$S'(A)$。

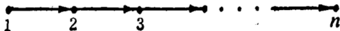
顺便指出，同型代数具有相同的格式，此外因为$V_i = P_iR/P_iR^2$，故代数A和A/R^2的格式相同。

例 1 若代数A是半单的，则$R_i = 0$，此时$S(A)$就是一些点的集合而没有任何射线。

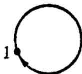
2．设$A = T_n(K)$是一切n阶三角矩阵组成的代数。矩阵单位e_{ii}是它的本原幂等元，而$1 = e_{11} + \cdots + e_{nn}$是单位元的分解，易见$[e_{ii}A:K] = n - i + 1$，故$P_i = e_{ii}A$是互不同构的主$A$-模。由定理5.3直接可得

$$R_i = e_{i(i+1)}K + \cdots + e_{in}K \simeq P_{i+1}$$

因此$S(A)$具有形状：



3．Jordan代数$J_n(K)$是局部代数，而它的根是循环的（请去验证它）．因此，正则模是它的唯一的主模，而它是其根的投射复盖。故代数$J_n(K)$的格式为



一般地，我们将称由一些点以及其间连接的一些射线组成的任意有限集叫作**格式**S。通常我们将用数码$1, 2, \cdots, s$来表示点。这时格式S可由其**连接矩阵**

$$[S]=\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1s} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{s1} & t_{s2} & \cdots & t_{ss} \end{pmatrix}$$

来确定，这里t_{ij}是由i点到j点的射线个数。如果格式S的射线σ是连接点i和点j的，就称i是**起点**，而j是**终点**，并记作：σ：$i \to j$。

两个格式S和T叫作**同构的**，如果在它们的点和射线之间可建立一个一一对应，使得相对应的射线的起点和终点也是互相对应着的。不难确信，$S \simeq T$（S和T同构）当且仅当可把连接矩阵$[S]$和$[T]$中之一经过一系列同时交换相同序数的行和列而得到另一个。特别是代数的格式在同构意义下唯一确定。

格式S的**路**指的是射线的一个有序集$\{\sigma_1,\cdots,\sigma_k\}$，这里射线$\sigma_i$的终点要和射线$\sigma_{i+1}$的始点相同（$i=1,\cdots,k-1$）。射线的个数$k$称作**路长**。射线$\sigma_1$的始点叫作**路的始点**，而射线$\sigma_k$的终点叫作**路的终点**。将说此路**连结**点i和点j并记作$\sigma_1\cdots\sigma_k$:$i\to j$。

下面认定代数A是简约的。此时有$\bar{A}\simeq D_1\times\cdots\times D_s$，这里$D_i=E_A(U_i)$，而$U_i$可看成是正则$D_i$-模。设$\bar{1}=\bar{e}_1+\cdots+\bar{e}_s$是使$\bar{e}_i\bar{A}\simeq D_i$的，代数$\bar{A}$的单位元的分解式，$1=e_1+\cdots+e_s$是代数$A$的单位元的相应分解式（参看推论3.9）。这时$P_i=e_iA$；$R_i=e_iR$，而$V_i=e_iV$，其中$V=R/R^2$。令$V_{ij}=e_iVe_j$。$V_{ij}$是右$D_j$-模，并且$V_{ij}\simeq t_{ij}U_j$。因此$\mu_{D_j}(V_{ij})=t_{ij}$。选定$V_{ij}$的一个由$t_{ij}$个元素组成的生成元系，并把这些生成元看成是格

式$S(A)$的，由i进入j的射线（也是t_{ij}个）。设v_σ是对应着射线σ：$i\to j$的生成元，而r_σ是它在$R_{ij}=e_iRe_j$中的一个原像。所有这样元素（对格式S的所有射线）的全体$\{v_\sigma\}$组成模V的一个生成元系。依Nakayama预理（推论1.5）$\{r_\sigma\}$是R(作为右理想）的生成元系。这里顺便指出，若是σ：$i\to j$，则$e_ir_\sigma=r_\sigma e_j=r_\sigma$，若是射线$\sigma$的终点异于射线$\tau$的始点，则$r_\sigma r_\tau=0$。

预理6.1 若格式$S(A)$中不存在由点i进入点j的路（$i\neq j$），则$\mathrm{Hom}_A(P_j,P_i)=0$。若代数$A$是简约的，则任意元素$r\in R_{ij}$可表成形式

$$r=\sum r_{\sigma_1}r_{\sigma_2}\cdots r_{\sigma_k}a_{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_k},$$

其中Σ是对一切路$\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_k$:$i\to j$去求和，而$a_{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_k}\in A_{jj}=e_jAe_j$。

证：由预理5.5可认定代数A是简约代数，而这时依定理5.3$\mathrm{Hom}_A(P_j,P_i)\simeq e_iAe_j=R_{ij}$(当$i\neq j$)。因此只需证明第二个结论。上面刚作过的讨论说明，如果$r\in R_{ij}$，则$r\equiv\Sigma r_\sigma a_\sigma$ $(\mathrm{mod}R^2)$，其中$a_\sigma\in A_{jj}$，而是对所有射线σ:$i\to j$求和。此时元素$r'=r-\Sigma r_\sigma a_\sigma$属于$e_iR^2e_j$。但$R=\sum\limits_{j,i}R_{ij}$，由之得$e_iR^2e_j=\sum\limits_k R_{ik}R_{kj}$，亦即$r'=\sum\limits_k x_ky_k$，其中$x_k\in R_{ik}$，$y_k\in R_{kj}$。又有$x_k\equiv\sum\limits_t r_\tau a_\tau(\mathrm{mod}R^2)$，其中$\tau$:$i\to k$，$a_\tau\in A_{kk}$而$a_\tau y_k\equiv\sum\limits_\rho r_\rho a_{\tau\rho}(\mathrm{mod}R^2)$，其中$\rho$:$k\to j$，$a_{\tau\rho}\in A_{jj}$。因此$r'\equiv\Sigma r_\tau r_\rho a_{\tau\rho}(\mathrm{mod}R^3)$，这里$\tau\rho$:$i\to j$。继续这一进程并注意

到根的幂零性，我们就得到关于 r 的欲求表达式。附带提一下，即使有由i进入j的路，也有可能$\mathrm{Hom}_A(P_j,P_i)=0$。

格式S叫作**连通的**，如果它不能被分成两个不空的互不交的子集，且在它们之间没有射线连接。

定理6.2 代数A不能分解成直积当且仅当格式$S(A)$是连通的。

证：设格式$S=S(A)$是不连通的，$S=S_1\cup S_2$，且$S_1\cap S_2=\varnothing$，$S_1\neq\varnothing$，$S_2\neq\varnothing$以及在S_1和S_2的点之间没有射线连接。此时依预理6.1，如果$i\in S_1$，$j\in S_2$，必$\mathrm{Hom}_A(P_i,P_j)=0$，$\mathrm{Hom}_A(P_j,P_i)=0$。依推论Ⅰ.7.9代数$A$可分解。反之，如果代数$A$可分解，$A=A_1\times A_2$，则对于任意主$A_1$-模$P_i$和任意主$A_2$-模$P_j$必有$\mathrm{Hom}_A(P_i,P_j)=0$和$\mathrm{Hom}_A(P_j,P_i)=0$，因而点$i$和$j$不相连接，故格式$S(A)$是不连通的。

推论6.3 代数A和代数A/R^2或者都可分解或者都不可分解。

除了格式$S(A)$，代数A还有一系列重要的不变量。这里指的首先是可除代数$D_i=E_A(U_i)$以及P_i出现在正则模分解中的重数n_i。对于简约代数$n_i=1$，但可除代数D_i可以是任意的。如果域K是代数闭域，情况就大大简化了：所有D_i都等于基本域K。

域K上代数A叫作**可裂的**，如果$A/R\simeq M_{n_1}(K)\times\cdots\times M_{n_s}(K)$。在代数闭域上所有代数都是可裂的。

对于可裂代数预理6.1可以加强一些。

预理6.4 设A是简约可裂代数。此时任意元素$r\in R_{ij}$可以表成形式$r=\sum r_{\sigma_1}r_{\sigma_2}\cdots r_{\sigma_k}c_{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_k}$，其中$c_{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_k}\in K$，而对所有路$\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_k:i\to j$求和（提醒一下，这里$i=j$是可

能的）.

证：只要注意到，在这种情形，我们有 $A_{ii}/R_{ii}=K$，即是代数 A_{ii} 的任意元素可表成形式 $c+x$，其中 $c\in K$，$x\in R_{ii}$，逐字重复预理6.1的证明即得.

我们称始点终点相同的路为**圈**.

推论6.5 若在简约可裂代数 A 的格式中没有圈，则对任意主 A-模 P 有 $E_A(P)=K$.

预理6.4使得我们可以依任意一个格式 S 来构造一个 K-代数 $K(S)$，一般言是无限维的，使得具有给定格式的任意简约可裂代数都是它的一个商代数.

向量空间 $K(S)$ 的基是由格式 S 的所有可能的路以及符号组 $\{\varepsilon_i\}$（对每一点 i 取一个）组成. 这样，$K(S)$ 的每一元素均可唯一写成形状 $\sum_{i=1}^{S} c_i\varepsilon_i+\sum c_{\sigma_1\cdots\sigma_k}\sigma_1\cdots\sigma_k$（第二个是按格式 S 的所有路取和），其中 $c_i\in K$，$c_{\sigma_1\cdots\sigma_k}\in K$. 我们可把符号 ε_i 看成是以点 i 为始点和终点，路长为零的路.

现在来规定乘法，如果路 α 的终点和 β 的始点相同，就规定路 α，β 之乘积为路 $\alpha\beta$，不然的话，就规定它们的乘积为0.换言之，

$$(\sigma_1\cdots\sigma_k)(\tau_1\cdots\tau_l)=\begin{cases}\sigma_1\cdots\sigma_k\tau_1\cdots\tau_l, & \text{如果}\sigma_k\text{的终点与}\tau_1\text{的始点相同.}\\ 0, & \text{其他情形;}\end{cases}$$

$$\varepsilon_i\sigma_1\cdots\sigma_k=\begin{cases}\sigma_1\cdots\sigma_k, & \text{如果}i\text{是}\sigma_1\text{的始点,}\\ 0, & \text{其他情形;}\end{cases}$$

$$\sigma_1\cdots\sigma_k\varepsilon_i=\begin{cases}\sigma_1\cdots\sigma_k, & \text{如果}i\text{是}\sigma_k\text{的终点,}\\ 0, & \text{其他情形;}\end{cases}$$

$$\varepsilon_i\varepsilon_j=\begin{cases}\varepsilon_i, & \text{当}i=j,\\ 0, & \text{当}i\neq j.\end{cases}$$

可将此定义《按分配律》延扩到整个空间$K(S)$上，即规定

$$\left(\sum_\alpha c_\alpha\alpha\right)\left(\sum_\beta c_\beta'\beta\right)\sum_{\alpha,\beta}c_\alpha c'_\beta(\alpha\beta),$$

其中α，β是格式S的路，而c_α，c'_β是域K的元素。直接验证易知，这使$K(S)$成为域K上的一个代数，它有单位元$1=\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_s$。

令J表示代数$K(S)$中下列元素的全体：它们的表达式中对于所有i言，ε_i的系数都是零。显然，J是$K(S)$的理想。理想$I\subset K(S)$叫作**规则理想**，如果对某个$n\geqslant 2$有$J^2\supset I\supset J^n$。

定理6.6 对于任意规则理想$I\subset K(S)$，商代数$K(S)/I$是具有格式S的可裂简约代数。反之，任意具有格式S的可裂简约代数同构于代数$K(S)$关于某一规则理想I的商代数。

证：设$A_n=K(S)/J^{n+1}(n\geqslant1)$。代数$A_n$的基由剩余类$\bar{\alpha}=\alpha+J^{n+1}$组成，其中$\alpha$是格式$S$的路长不大于$n$的任意路。$\bar{J}=J/J^{n+1}$是$A_n$的幂零理想，并且$A_n/\bar{J}\simeq K(S)/J\simeq K^s$（此代数的基由剩余类$\bar{\varepsilon}_i=\varepsilon_i+J$组成，且有$\varepsilon_i\varepsilon_j=\delta_{ij}\varepsilon_i$）。依命题1.13，$\bar{J}=\operatorname{rad}A_n$。这样，$A_n$是简约可裂代数，并且$A_n/\bar{J}^2\simeq A_1$，即$S(A_n)=S(A_1)$。但在代数$A_1$中$\bar{\varepsilon}_i\bar{J}\bar{\varepsilon}_j$是$K$上向量空间，以$\{\bar{\sigma}\}$为基，此处$\sigma$是由$i$入$j$的射线。因此，

若 $[S]=(t_{ij})$ 是格式 S 的连接矩阵，则 $\bar{\varepsilon}_i\bar{J}\bar{\varepsilon}_j\simeq t_{ij}U_i$，其中 $U_i=\varepsilon_i A_1/\bar{\varepsilon}_i\bar{J}$，以及 $S(A_1)=S$。由之便得定理的第一个结论（注意到推论1.14）。

今令 A 是具有格式 S 的一个任意简约可裂代数，$1=e_1+\cdots+e_s$ 是单位元用本原幂等元表示的分解式，$\{r_\sigma\}$ 是根的一个生成元系，其构成已在上面（预理6.1前面）给出。

对格式 S 的任一路 $\alpha=\sigma_1\cdots\sigma_k$，设 $r_\alpha=r_{\sigma_1}\cdots r_{\sigma_k}$，$r_{\varepsilon_i}=e_i$，并令 $f\left(\sum\limits_{\alpha}c_\alpha\alpha\right)=\sum\limits_{\alpha}c_\alpha r_\alpha$。由 r_σ 和 e_i 之间的关系可知 f 是代数 $K(S)$ 到代数 A 的同态对应，而由预理6.4知它还是满的。因此 $A\simeq K(S)/I$，其中 $I=\mathrm{Ker}f$。另一方面，易见 $f(J)=R$，其中 $R=\mathrm{rad}A$。由于有个 n 使 $R^n=0$，故 $J^n\subset I$。最后，元素 $v_\sigma=r_\sigma+R^2$ 在 R/R^2 中线性无关，因此同态 $A_1\to R/R^2$ 是同构，即 $I\subset J^2$。定理全部证完。

代数 $K(S)$ 叫作**路代数**，或叫作**格式S的泛代数**。

当然，对于左格式也可给出类似的构造，然而有下面这个命题。

命题6.7 若 A 是可裂代数，则只要把所有射线转向或者把连接矩阵转置便由格式 $S(A)$ 得到 $S'(A)$。

证：可以认定代数 A 是简约的。我们早已知道，此时有 $[S(A)]=(t_{ij})$，其中 t_{ij} 是向量空间 e_iVe_j 的维数（其中 $V=R/R^2$，而 $1=e_1+\cdots+e_s$ 是单位元用本原幂等元表示的分解式）。类似地有 $[S'(A)]=(t'_{ij})$，其中 t'_{ij} 是 e_jVe_i 的维数，即有 $t'_{ij}=t_{ji}$，这正是我们要证的。

§ 7　继承代数

构造了泛代数，这使我们能刻划一个有趣的代数类——继承代数。

代数叫作**继承代数**，如果其中任意右理想都是投射模[8]。

定理7.1　下列诸条件等价：

1）A是继承代数；

2）主A-模的任意子模都是投射模；

3）投射A-模的任意子模都是投射模；

4）$\mathrm{rad} A$（作为右A-模）是投射模。

证：2）是1）的特殊情况，1）是3）的特殊情况，故有1）⇒2）和3）⇒1）。

2）⇒4）　若$A = P_1 \oplus \cdots \oplus P_n$，其中$P_i$是主模，则$\mathrm{rad} A = R = R_1 \oplus \cdots \oplus R_n$，此处，$R_i = \mathrm{rad} P_i$。因此，由所有$R_i$的投射性可得$R$的投射性。

4）⇒3）　设M是投射A-模P的子模。今对$l(P) = l$作归纳法来证M的投射性。归纳法的第一步，$l = 1$，是显然的，故可认定命题对$l(P) < l$的情形已经成立。

模P有主直和项P_1：$P = P_1 \oplus P_2$（可能$P_2 = 0$）。用π表示P到P_1上的投影。如果$\pi(M) = P_1$，则由定理3.5，$M \simeq P_1 \oplus N$，其中$N = M \cap P_2$是P_2的子模。因为$l(P_2) < l$，

（8）同样地可引入左继承代数，但在第八章中我们将看到，对于有限维代数这两个概念是一致的。

故N（随之M）是投射模.

若是$\pi(M)\neq P_1$，则$M\subset R_1\oplus P_2$，其中$R_1=P_1R$是根的直和项，因而是投射模. 但此时也有$l(R_1\oplus P_2)<l$，故M是投射模. 定理证完.

预理7.2 若A是继承代数，则主A-模间的任一非零同态$f:P_i\to P_j$都是单的.

证：在这种情形下，$\mathrm{Im}f$是投射模，而依定理3.5$P_i\simeq\mathrm{Im}f\oplus\mathrm{Ker}f$. 这说明，若$\mathrm{Im}f\neq 0$，必定$\mathrm{Ker}f=0$.

推论7.3 若A是继承代数，则在格式$S(A)$中没有圈.

证：若在$S(A)$中有一个始点i终点j的射线，则存在一个非零同态$f_\sigma:P_i\to P_j$，并且$\mathrm{Im}f_\sigma\subset\mathrm{rad}P_j$. 设$A$是继承代数，而$\sigma_1\cdots\sigma_k$是以$i$为始点终点的路. 此时，$f=f_{\sigma_1}\cdots f_{\sigma_k}$是单同态$P_i\to P_i$，因为$f_{\sigma_1},\cdots,f_{\sigma_k}$都是单的，且$\mathrm{Im}f\subset\mathrm{rad}P_i$，从维数之间的关系来看这是不可能的.

今给出关于继承简约可裂代数的刻划.

定理7.4 若S是无圈的格式，则$K(S)$是继承代数. 反之，继承简约可裂代数A同构于代数$K(S)$，其中$S=S(A)$. 这样，在无圈格式和简约可裂继承代数之间有一个一一对应.

证：显然，在无圈格式中，路的长是有界的，因此，$A=K(S)$是有限维代数. 令$P_i=\varepsilon_iA$. P_i的元素是一些线性组合$\sum\limits_{\alpha}c_\alpha\alpha$，其中$\alpha$是具始点$i$的路（包括$\varepsilon_i$）. 此时，$\mathrm{rad}P_i=P_iJ$则是由线性组合$\sum\limits_{\alpha}c_\alpha\alpha$组成，这里$\alpha$是具始点$i$的一些非零路长的路. 因此，$P_iJ=\bigoplus\limits_{\sigma}\sigma A$，其中$\sigma$历遍所有具始点$i$

的射线。但若$\sigma: i \to j$，则把任一线性组合$\sum_{\beta} c_{\beta}\beta$（其中$\beta$是具始点$j$的路，也包括$\varepsilon_j$）对应于元素$\sum_{\beta} c_{\beta}\sigma\beta$，易见，我们将得同构$P_j \simeq \sigma A$。因而，$P_i J$是投射模，随之$J = \bigoplus_{i=1}^{S} P_i J$也是投射模，而依定理7.1，$A$是继承代数。

剩下来要验证的是，如果$I \subset J^2$且$\tilde{A} = A/I$是继承代数，则$I = 0$。设$R = J/I$，$\tilde{P}_i = P_i/P_i I$。此时$R = \mathrm{rad}\tilde{A}$，而$\tilde{P}_i$是主$\tilde{A}$-模。此外还有$\tilde{A}/R \simeq A/J$，而$R/R^2 \simeq J/J^2$。今对$k$作归纳法来证明，还有$R^k/R^{k+1} \simeq J^k/J^{k+1}$。设$R^{k-1}/R^k \simeq J^{k-1}/J^k$而令$\tilde{P} = P(R^{k-1}/R^k) = \bigoplus_{i=1}^{S} m_i \tilde{P}_i$。此时$\tilde{P} = P(R^{k-1})$（定理3.7），又因为$R^{k-1}$是投射模，故$\tilde{P} \simeq R^{k-1}$。因此$R^k \simeq \tilde{P}R$，而$R^k/R^{k+1} \simeq \tilde{P}R/\tilde{P}R^2$，注意到$\tilde{P}_i R/\tilde{P}_i R^2 \simeq P_i J/P_i J^2$，由之便得$R^k/R^{k+1} \simeq J^k/J^{k+1}$。但由此同构关系显然可得对所有的$k$有$I \subset J^k$，即$I = 0$，这也正是要证的。

习　题

1．给出代数$T_n(K)$的根。

2．给出独生代数$K[x]/f(x)K[x]$的根。

3．证明，如果A不是单代数，则其中必有极大理想，它具有非零的零化子。

4．证明，极小右理想或者包含在根中或者是主模。

5．设M是代数A的模，$R = \mathrm{rad}A$，$\bar{A} = A/R$，　$\bar{A} =$

$n_1U_1\oplus\cdots\oplus n_sU_s$ 是 $\bar{A}$ 的表成单模直和的一个分解式，$\bar{M}=M/MR\simeq t_1U_1\oplus\cdots\oplus t_sU_s$。证明$\mu_A(M)=\mu_A(\bar{M})$。证明

$$\mu_A(M)=\max_i\left\{\left[\frac{t_i-1}{n_i}\right]+1\right\}$$

其中$[t/n]$是数t/n的整数部分。

6．用$I(M)$表示模 M 的所有自同态中把M映入 rad$M$ 的全体映射的集。

a）验证$I(M)$是$E_A(M)$的幂零理想。

b）证明，对投射模P有$I(P)=\mathrm{rad}E_A(P)$。

c）给出一个模M，使得$I(M)\neq\mathrm{rad}E_A(M)$。

7．证明，一个代数是简约的当且仅当它的幂零元素组成理想。

8．设$1=e_1+\cdots+e_n$是代数 A 的单位元的分解，这里的所有幂等元都是本原的。

a）证明代数A的忠实表示的维数不小于n。

若是A有一个维数 n 的忠实表示，就称 A 为 **n 次极小代数**。

b）设A是极小代数．若是 $e_iAe_j\neq 0$，就记作 $i\to j$。证明关系→是集合$S=\{1,2,\cdots,n\}$上的**拟序关系**，即是，$i\to i$，并且由$i\to j$和$j\to k$有$i\to k$。

c）证明，极小代数A必是可裂代数，A是简约代数当且仅当→是序关系，即还有，由$i\to j$和$j\to i$必得$i=j$。

9．设在集 $S=\{1,2,\cdots,n\}$ 上给定一个拟序→。试构造一个n次极小代数，使得$i\to j$当且仅当 $e_iAe_j\neq 0$（提示：如果有$i\to j$，就在 $M_n(K)$ 中选出相应的矩阵单位 e_{ij}。考虑以这样的e_{ij}为基的那个子代数）。

10. 证明两个n次极小代数，如果它们在S上给出相同的拟序，它们必同构。

11. 找出极小代数的根、格式和基代数。证明，一个代数是极小的当且仅当它的的基代数是极小的。

12. 设$R^2 = 0$，其中$R = \mathrm{rad}A$，$P_1, \cdots, P_S$是主A-模．证明$\mathrm{Hom}_A(P_i, P_i) \neq 0$，$i \neq j$当且仅当在格式$S(A)$中由$i$进入$j$有射线。

13. 证明，$R^2 = 0$的可裂简约代数A（$R = \mathrm{rad}A$）在同构的意义下由其格式唯一确定。

14. 设A是实数域R上的代数，它是由形如

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

其中$a \in R$，b，$c \in C$，的二阶复矩阵组成。试找出$S(A)$和$S'(A)$。

15. 刻划代数闭域上的三维代数。

16. 设φ是代数A的自同态，$T: A \to M_n(K)$是此代数的一个表示，M是相应的模。我们用$M\varphi$表示对应于表示$T\varphi$: $A \to M_n(K)$的模。

a）给出模$M\varphi$的内部刻划并验证$M(\varphi\psi) \simeq (M\varphi)\psi$，而$(M \oplus N)\varphi \simeq M\varphi \oplus N\varphi$。

b）证明，若φ是自同构，则模$P\varphi$是投射的当且仅当模P是投射的。（提示：验证$A\varphi \simeq A$）

c）证明，若A是简约代数，P和Q是投射A-模，则$E_A(p) \simeq E_A(Q)$当且仅当存在代数A的一个自同构φ，使得$Q \simeq P\varphi$。（提示：利用自同态的矩阵记法）

d）给出简约代数A上一个投射模P，使得对代数A的一

个自同构φ有$P\not\cong P\varphi$。

17．格式S叫作**具重数的格式**，如果对每一点i配以一个自然数n_i。令$A=K(S)$，$P_i=\varepsilon_i A$，$P=n_1P_1\oplus\cdots\oplus n_sP_S$，$\tilde{A}=E_A(P)$。对于代数$\tilde{A}$去证明定理6.6的平行结果，而用任意可裂代数代替简约可裂代数，用具重数的格式代替格式。

18．证明，若格式S没有圈，则习题17中的代数是**继承**的，并且任意可裂继承（有限维）代数具有这种形状。

19．模M的所有极小子模之和叫作M的**基座**记作$\mathrm{soc}M$。

a）证明，$\mathrm{soc}M=M$当且仅当M是半单的。

b）证明，在任意同态$f:M\to N$之下$f(\mathrm{soc}M)\subset\mathrm{soc}N$，并且$f$是单同态当且仅当导出同态$\mathrm{soc}M\to\mathrm{soc}N$是单的。

c）证明，右和左正则A-模的基座都是A的理想。顺序称之为**代数A的右基座**和**左基座**，记作$\mathrm{r.soc}A$和$l.\mathrm{soc}A$。

d）验证，$\mathrm{r.soc}\,A=\{a\in A\mid aR=0\}$（$R=\mathrm{rad}A$），而$l.\mathrm{soc}\,A=\{a\in A\mid Ra=0\}$。

e）找出代数$A=T_n(K)$的右和左基座，证明$\mathrm{r.soc}A\neq l.\mathrm{soc}A$。

20．设$P_1,\cdots,P_S$是所有互不同构的主A-模。在P_i中取定一个组成列并假设在此列的单因子中单模$U_j=P_j/\mathrm{rad}P_j$出现c_{ij}次。数c_{ij}叫作**Cartan数**，而矩阵$c(A)=(c_{ij})$叫作代数A的**Cartan矩阵**。

a）证明，$c(A)=c(B)$，其中B是代数A的基代数。

b）证明，如果$(\mathrm{rad}A)^2=0$，则$c(A)=E+[S]$（E是单位矩阵，$[S]$是格式$S=S(A)$的连接矩阵）。

c）令$A_n=K(S)/J^{n+1}$。证明$c(A_n)=E+[S]+[S]^2+\cdots+[S]^n$。

d）设$S=S(A)$。证明，对于继承代数 A，矩阵$[S]$必是幂零的，且$c(A)=\sum_{m=0}^{\infty}[S]^m$，而Cartan数$c_{ij}$等于格式$S$中始点为$i$终点为$j$的路的个数$(i\neq j)$，$c_{ii}=1$.（提示：在这种情形下当$i\neq j$时，$C_{ij}=\sum_k t_{jk}c_{kj}$，即$c(A)=[S]c(A)+E$，其中$[S]=(t_{ij})$。）

第四章　中心单代数

Wedderburn-Artin 定理将半单代数的研究归结到域 K 上的可除代数的研究。如果D是域 K 上的有限维可除代数，C是D的中心，则C也是域（K的扩域），而 D 可以看成域C上的代数。这样，我们的讨论划分为两个阶段：第一，讨论域K 的扩张，第二，研究**中心可除代数**．也就是中心与基础域重合的可除代数。这两个问题看来是非常不同的。但是，在这里却可使用共同的研究方法，它建立在双模和代数张量积的基础之上。

本章也要阐明这些方法，并将它们用于中心可除代数的研究。此处定理 3.1 起了重要的作用，从这个定理能够比较简单地引出可除代数基本定理（Skolem-Noether 定理和关于中心化子的定理）。

§1　双　模

设A、B是域K上的代数，M是域K上的向量空间，在M上给出左A-模和右B-模结构，二者之间以结合律相联系，即任取$a\in A$，$b\in B$，$m\in M$，有$(am)b=a(mb)$，则M叫作**A-B-双模**。

若$A=B$，M简称为**A-双模**。

在第一章中对模引入的所有概念也可对双模来引入：同

态，同构，子双模，商双模，直和等等。第一章的基本结论，像同态定理，平行四边形法则，Jordan-Hölder 定理等等可以逐字逐句地搬到双模上来。其实，我们在下一节将会看到，讨论A-B-双模，本质上相当于讨论代数 A与B^0的张量积上的模。

我们来看一些例子，它们在后面起重要作用，并体现出双模概念对代数结构理论的重要性。

例 1 显然，一切代数A都可以看作自身上的双模。称为**正则双模**。正则双模的子双模是一个子空间 $I\subset A$，用A的任意元素a去左乘和右乘都封闭，也就是代数A的理想。按照这一观点，单代数恰是单的正则双模。

我们来看正则双模的自同态是怎样建立的。设 f：$A\to A$是这样的自同态，那么 f 当然是正则模的同态，正如定理 Ⅰ.7.1指出的，这个同态形如 $f(x)=ax$，此处 a 是A的固定元素。但 f 也是左正则模的同态，这就表明，任取 $b\in A$，$f(bx)=bf(x)$，即 $\forall b,x\in A$，$abx=bax$，从而$a\in C(A)$。反之，若元素 a属于A的中心，则同样的论证可得，乘以元素a是正则双模的自同态。这样，我们就建立了下述命题。

命题1.1 正则双模的子双模是代数的理想。正则双模的自同态代数同构于代数的中心。

例 2 设f：$B\to A$是代数同态。我们把它与一个 B-A-双模 ${}_fA$ 联系起来。为此，考察正则 A-模，并按公式 $ba=f(b)a$定义左 B-模结构。这时，结合律自然满足，A 成为 B-A-双模，记作${}_fA$。例 1 也可以用这种方法得到，只要令 $B=A$，f是恒等自同构即可。

例 3 考察D-双模，此处 D 是域 K 上的有限维可除代

数．如果M是这样的双模，则M特别是可除代数D上的(左)向量空间．取定$d\in D$,映射$m\to md$是向量空间M的自同态，设$[M:D]=n$,在确定的同构$M\simeq nD$之下,这个映射对应着矩阵$T(d)\in M_n(D)$,并且易验，$T(d+d')=T(d)+T(d')$；$T(\alpha d)=\alpha T(d)(\alpha\in K)$；$T(dd')=T(d)T(d')$；$T(1)=1$．对应$d\to T(d)$称为**可除代数D的n维自表示**．

$n=1$的情况特别有趣．这时$T(d)\in D$，而T：$D\to D$是可除代数D的**自同构**．

反之，任意n维自表示都可以同D-双模联系起来，取向量空间nD，对$x\in nD$，令$xd=xT(d)$即可．特别地，任意自同构都联系着一个D-双模M，$[M:D]=1$．

§2 张量积

在第一章，我们把表示即保持乘法的线性映射的概念与模的概念联系起来了．此处，我们试图对双模建立类似的联系．

设M是A-B-双模．这时，任取$a\in A$，$b\in B$，元素对(a,b)对应着向量空间M的自同态$m\to amb$．我们得到了$A\times B\to E(M)$的一个映射，易见，这个映射是双线性的（即在固定a下按元素b是线性的，且反之亦成立)．于是我们暂时忽略乘法，先来分析$U\times V\to W$的双线性映射，此时U、V、W是域K上的向量空间．

取向量空间U和V的基$\{u_1\cdots,u_n\}$及$\{v_1,\cdots,v_m\}$．双线性映射F：$U\times V\to W$被值$F(u_i,v_j)=w_{ij}$唯一确定，而w_{ij}可以任意指定，这就引出了下述定义．

设$\{u_1,\cdots,u_n\}$是向量空间U的一组基，$\{v_1,\cdots,v_m\}$是向量空间V的一组基，以$\{u_i\otimes v_j\}i=1,\cdots,n$；$j=1,\cdots,m$为基的向量空间记作$U\otimes V$，称$U\otimes V$为$U$、$V$的**张量积**。双线性映射$\otimes$：$U\times V\to U\otimes V$，由公式$\otimes(u_i,v_j)=u_i\otimes v_j$定义，元素对$(u,v)$在映射$\otimes$下的像记作$u\otimes v$。

上面的论述建立了**张量积的泛性**。

定理2.1 对任意双线性映射F：$U\times V\to W$，存在着唯一的线性映射$\tilde{F}$：$U\otimes V\to W$，使得$F=\tilde{F}\otimes$（即$F(u,v)=\tilde{F}(u\otimes v)$）。

推论2.2 设Φ：$U\times V\to W_0$是一个双线性映射，若对任意双线性映射F：$U\times V\to W$，存在唯一的映射$\tilde{F}$：$W_0\to W$，使$\tilde{F}\Phi=F$，则存在唯一的同构φ：$W_0\cong U\otimes V$，使$u\otimes v=\varphi\Phi(u,v)$对任意元素$u\in U$，$v\in V$成立。

证：从推论的条件得到满足$u\otimes v=\varphi\Phi(u,v)$的同态$\varphi$：$W_0\to U\otimes V$，且$\varphi$是唯一的。另一方面，从定理2.1知，存在同态$\tilde{\Phi}$：$U\otimes V\to W_0$，使$\tilde{\Phi}(u\otimes v)=\Phi(u,v)$。但这时$\varphi\tilde{\Phi}(u\otimes v)=\varphi\Phi(u,v)=u\otimes v$，仍根据定理2.1，$\varphi\tilde{\Phi}=1$，类似地有$\tilde{\Phi}\varphi=1$，即$\tilde{\Phi}$是$\varphi$的逆映射。

同构φ的存在唯一性使我们可以将满足推论2.2条件的一切向量空间W_0与张量积$U\otimes V$视为同一。特别地，利用U和V的各种不同的基得到的张量积均可视为同一。

此外，定理2.1使我们得以建立张量积的基本性质。

命题2.3 对任意向量空间U，V，W，存在唯一的同构f：$U\otimes V\cong V\otimes U$，使$f(u\otimes v)=v\otimes u$，以及唯一的同构$g$：$(U\otimes V)\otimes W\cong U\otimes(V\otimes W)$，使$g((u\otimes v)\otimes w)=u\otimes(v\otimes w)$。

证：因为 $(u,v)\to v\otimes u$ 是双线性映射，所以存在唯一的同态f：$U\otimes V\to V\otimes U$，使$f(u\otimes v)=v\otimes u$。类似地，存在同态f'：$V\otimes U\to U\otimes V$，使$f'(v\otimes u)=u\otimes v$，从定理2.1立得，$f$与$f'$是互逆的同构。

现设F是$(U\otimes V)\times W\to Z$的双线性映射，对固定的$w\in W$，它变成线性映射 F_w：$U\otimes V\to Z$，即双线性映射 $U\times V\to Z$，并且显然F_w 在W上是线性的。所以，对固定的$u\in U$，将(v,w)送到$F_w(u,v)$ 的映射 $V\times W\to Z$ 是双线性的，并因此定义了一个线性映射：$V\otimes W\to Z$，线性地依赖于u。这就定义了一个双线性映射：$U\times(V\otimes W)\to Z$，现在转到张量积，我们将任意 $(U\otimes V)\otimes W\to Z$ 的线性映射对应到：$U\otimes(V\otimes W)\to Z$的映射（唯一性显然）。反之，任意$U\otimes(V\otimes W)\to Z$的映射，对应着唯一的$(U\otimes V)\otimes W\to Z$的映射，先令 $Z=(U\otimes V)\otimes W$，然后令 $Z=U\otimes(V\otimes W)$，我们就得到了所需要的同构g及g的逆。

今后，我们分别将 $U\otimes V$ 与 $V\otimes U$，$(U\otimes V)\otimes W$ 与 $U\otimes(V\otimes W)$视为同一（并省略括号，将后者记作$U\otimes V\otimes W$。

按照定义，$U\otimes V$ 的任意元素可唯一地表成 $\sum_{i,j}\alpha_{ij}(u_i\otimes v_j)$ 的形式。令 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}u_i=x_j$，我们可将此元素写成 $\sum_{j=1}^{m}x_j\otimes v_j$，容易验证，这种写法是唯一的。类似地，$U\otimes V$ 的任意元素也可以唯一地写成 $\sum_{i=1}^{n}u_i\otimes y_i$的形式，其中$y_i\in V$。

若U'是U的子空间，则$(u',v)\to u'\otimes v$是$U'\times V\to U\otimes V$的双线性映射，它定义了一个同态f：$U'\otimes V\to U\otimes V$。若在$U$中取基，使$\{u_1,\cdots u_k\}(k\leqslant n)$是$U'$的基，则$f$的像由形如$\sum_{i=1}^{k} u_i\otimes y_i$的元素组成，显然，$f$是单同态，因而$U'\otimes V$可以看作$U\otimes V$的子空间。易见，若$U=U'\oplus U''$，则$U\otimes V=U'\otimes V\oplus U''\otimes V$。类似的论断对$V$的子空间亦真。

现设A和B是域K上的代数。对固定的$a_0\in A$和$b_0\in B$，$A\times B\to A\otimes B$的将元素对(a,b)映射到元素$aa_0\otimes bb_0$的映射显然是双线性的，从而引出了一个线性映射F：$A\otimes B\to A\otimes B$，使$a\otimes b\to aa_0\otimes bb_0$。另一方面，$F$对$(a_0,b_0)$是双线性的，所以我们可以将任意元素$x\in A\otimes B$对应到线性映射$Fx$，它线性地依赖于$x$，并使$F_{a_0\otimes b_0}(a\otimes b)=aa_0\otimes bb_0$。

记$F_x(y)=yx$，我们就得到了$A\otimes B$中的双线性乘法，任取a，$a_0\in A$，b，$b_0\in B$，有$(a\otimes b)(a_0\otimes b_0)=aa_0\otimes bb_0$。由于$[(a\otimes b)(a'\otimes b')](a''\otimes b'')=(aa'\otimes bb')(a''\otimes b'')=aa'a''\otimes bb'b''=(a\otimes b)[(a'\otimes b')(a''\otimes b'')]$

而 $(a\otimes b)(1\otimes 1)=(1\otimes 1)(a\otimes b)=a\otimes b$，这就使得向量空间$A\otimes B$成为域$K$上的代数，称之为**代数A和B的张量积**。

从命题2.3知，作为代数，也有$A\otimes B\simeq B\otimes A$，和$(A\otimes B)\otimes C\simeq A\otimes(B\otimes C)$。

张量积提供了将双模的研究归结为模的研究的可能性。

设M是某个A-B-双模。A^0表A的**反代数**，即由A的元素组成，但乘法由$a^0b^0=(ba)^0$确定的代数（此处a^0表元素a

$\in A$，但看作A^0的元素）．我们在M上引入代数$B\otimes A^0$上的模结构，即令$m(b\otimes a^0)=amb$。可直接验证这个定义的合理性以及模的公理。

反之，任意$A\otimes B^0$-模N可以看作A-B-双模，只要令$an=n(1\otimes a^0)$，$nb=n(b\otimes 1^0)$即可。这样，A-B-双模的概念与$B\otimes A^0$-模的概念实际上是一致的。

最后，我们来讨论，代数的张量积的中心。

定理2.4 $C(A\otimes B)=C(A)\otimes C(B)$。

证：在A中取$C(A)$的补子空间A'，即$A=A'\oplus C(A)$，这时，$A\otimes B=A'\otimes B\oplus C(A)\otimes B$。我们说，$C(A\otimes B)\subset C(A)\otimes B$。事实上，设$c\in C(A\otimes B)$，$c=x+y$，$x\in A'\otimes B$，$y\in C(A)\otimes B$。这时有$c(a\otimes 1)=(a\otimes 1)c$，又因为$y(a\otimes 1)=(a\otimes 1)y$自动满足，所以$x(a\otimes 1)=(a\otimes 1)x$。

取B的基$\{b_1,\cdots,b_m\}$，记$x=\sum_{i=1}^{m}x_i\otimes b_i$。从这种表示法的唯一性可知，$x_ia=ax_i$对任意$a$成立，即$x_i\in C(A)$。由于$x_i\in A'$，则$x_i=0$，因而$x=0$。

类似地，在$C(A)$中取基，分解$C(A)\otimes B=C(A)\otimes C(B)\oplus C(A)\otimes B'$，此处$B'$是$C(B)$的补，可得$C(A\otimes B)\subset C(A)\otimes C(B)$，反包含关系显然对，定理得证。

§3 中心单代数

域K上的代数A叫作**中心的**，若$C(A)=K$。

在本章初，我们提出研究域K上的有限维中心可除代数，

但后面可以看到，直接考虑所有的中心单代数，即形如$M_n(D)$（D中心可除）的代数更方便一些。

从命题1.1知，一个代数是中心单的，当且仅当它的正则双模是单的，且其自同态代数就是域K。这就提供了刻划代数$A\otimes A^0$的可能性。

设$E(A)$是向量空间A的自同态代数，定义代数$A\otimes A^0$到$E(A)$的同态T，把$T(b\otimes a^0)$取作空间A的线性算子，这个算子将$x\in A$送到axb。

定理3.1 域K上的代数A是中心单代数，当且仅当上面定义的$A\otimes A^0\to E(A)$的同态是一个同构。

证：设A是中心单代数，则A可以看作代数$A\otimes A^0$上的单模，其自同态代数是K。这时，根据定理Ⅱ.6.7，同态T：$A\otimes A^0\to E(A)$是满的，又因为$[A\otimes A^0:K]=n^2=[E(A):K]$，此处$n=[A:K]$，所以$T$是同构。

反之，设T是同构，将$A\otimes A^0$与$E(A)$视为同一，我们看到，A是单$A\otimes A^0$-模，即单A-双模，其自同态代数是K。也就是说，A是中心单代数。

设A是中心单代数，B是任意K-代数，我们运用定理3.1来研究代数$A\otimes B$的结构。

定理3.2 若A是中心单代数，则代数$A\otimes B$的理想形如$A\otimes I$，此处I是代数B的理想。

证：若I是B的理想，则$A\otimes I$显然是$A\otimes B$的理想。反之，设J是代数$A\otimes B$的理想。取A的一组基$\{a_1,\cdots,a_n\}$，则$A\otimes B$的元素均可唯一地表作$\sum_{i=1}^{n} a_i\otimes b_i$，$b_i\in B$。设$T_k$是

空间A的线性算子，它将a_k映到1，其余的基元映到0。根据定理3.1，$T_k = T(y_k)$，此处$y_k \in A \otimes A^0$；$y_k = \sum_{j=1}^{n} x_j \otimes a_j^0$，$x_j \in A$。这时$\sum_{j=1}^{n}(x_j \otimes 1) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i\right) \cdot (a_j \otimes 1) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j a_i a_j \otimes b_i\right) = \sum_{i=1}^{n}(a_i T_k) \otimes b_i = 1 \otimes b_k$。因此，若元素$\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i$在理想$J$中，则对任意$k$，$(1 \otimes b_k) \in J$。设$I = \{b \in B \mid 1 \otimes b \in J\}$，显然$I$是$B$的理想，正如刚才指出的，$J$的任意元素形如$\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i$，$b_i \in I$，即$J = A \otimes I$，定理证毕。

推论3.3 若A是中心单代数，则代数$A \otimes B$单，当且仅当B单。

推论3.4 若A是中心单代数，则$(A \otimes B)$的根$= A \otimes$(B的根)，其中B是任意代数。

证：从根的特征，即根是极大双边理想的交即可推得。

推论3.5 若A是中心单代数，则代数$A \otimes B$是半单的，当且仅当B是半单的。

将定理3.2与描述张量积中心的定理2.4联系起来，我们又得到下面的推论。

推论3.6 若 A 是中心单代数，则代数 $A\otimes B$ 是中心单的，当且仅当 B 是中心单代数。

§4 可除代数的基本定理

定理4.1 (Skolem-Noether) 设 f 和 g 是单代数 B 到中心单代数 A 的两个同态映射，则存在可逆元素 $a\in A$，使得 $\forall b\in B$，$g(b)=af(b)a^{-1}$。

证：考察 B-A-模 $_fA$ 和 $_gA$（看§1例2），它们是代数 $A\otimes B^0$ 上的模，由推论3.4知，$A\otimes B^0$ 是单代数。但因为这两个模的维数相等（等于$[A:K]$），根据推论Ⅰ.3.5，$_fA\simeq {_gA}$。

设 φ 是 $_fA$ 到 $_gA$ 的同构。这时 φ 是正则 A-模的自同构，因此形如 $\varphi(x)=ax$，此处 a 是 A 中固定的可逆元。另外 φ 又是左 B-模同态，即有 $\varphi(bx)=b\varphi(x)$。考虑到 $_fA$ 和 $_gA$ 的定义，则 $\varphi(f(b)x)=g(b)\varphi(x)$。令 $x=1$，得 $af(b)=\varphi(f(b))=g(b)\varphi(1)=g(b)a$ 对一切 $b\in B$ 成立，即 $g(b)=af(b)a^{-1}$。

映射 $x\mapsto axa^{-1}$ 显然是代数 A 的自同构。叫作**内自同构**。如果 B 是 A 的子代数，则 $aBa^{-1}=\{aba^{-1}|b\in B\}$ 也是子代数。称 B 与 aBa^{-1} 在 A 中**共轭**。

推论4.2 中心单代数 A 中同构的单子代数 B 与 B' 共轭。而且，任意同构 g：$B\simeq B'$，可以延拓成代数 A 的内自同构，即形如 $g(b)=aba^{-1}$，此处 a 是 A 中的可逆元素。

证：与 g 同时，考察代数 B 到代数 A 的恒等嵌入 f，从Skolem-Noether定理立得。

推论4.3 任意中心单代数的自同构是内自同构。特别

地，一切代数$M_n(K)$的自同构是内自同构。

我们指出，在Skolem-Noether定理的证明中，仅仅利用了张量积$A\otimes B^0$的单性，代数A与B的地位实际上是平等的，因此，只要两个代数当中的任意一个中心单，而另一个单即可。所以，可以写出“对偶”的定理，其证明留给读者。

定理4.4 若f和g是中心单代数B到单代数A的两个同态，则在A中存在一个可逆元素a，使得任取$b\in B$，$g(b)=af(b)a^{-1}$。

推论4.5 单代数A中同构的中心单子代数B与B'共轭。而且，任意同构g：$B\simeq B'$，可以延拓成代数A的内自同构，即形如$g(b)=aba^{-1}$，其中a是A的可逆元素。

最后，类似于4.3的推论，对非中心单代数不真。最简单的例子是，将复数域看作实数域上的代数，复共轭不是内自同构。

Skolem-Noether定理通常称为**可除代数的第一基本定理**，第二基本定理与中心化子的概念有关。

设X是代数A的子集，对一切$x\in$ X，A中满足$ax=xa$的元素a的集合叫作X的**中心化子**。集合X的中心化子是A的子代数，记作C_A(X)。特别地，当X$=A$，$C_A(A)=C(A)$是代数A的中心。

定理4.6 设A是中心单代数，B是其单子代数，$B'=C_A(B)$。这时，

1） B'是单代数；

2） $C_A(B')=B$；

3） $[B:K][B':K]=[A:K]$；

4）若$B'\simeq M_m(D)$，则$A\otimes B^0\simeq M_n(D)$，并且m整除$n$。

证： 考察B-A-双模$_fA$，f是B到A的恒等嵌入。由推论3.4知，$A\otimes B^0$单，这就意味着$A\otimes B^0\simeq M_n(D)$，$_fA\simeq mU$，此处$U$是$A\otimes B^0$上的单模。所以$E_{A\otimes B^0}(_fA)\simeq M_m(D)$。

设φ是$_fA$的自同态，则它也是正则A-模的自同态，即φ形如$\varphi(x)=ax$。此外$\varphi(bx)=b\varphi(x)$，令$x=1$，得$ab=ba$对任意$b\in B$成立，即$a\in B'$。反之，若$a\in B'$，则映射$x\to ax$显然是$_fA$的自同态。所以$B'\simeq E(_fA)\simeq M_m(D)$。这就证明了论断1）和4）（整除性除外）。

记$[D:K]=d$。这时$U\simeq nD$，从而$[U:K]=nd$，$[A:K]=mnd$。另一方面，$[A:K][B:K]=[A\otimes B^0:K]=n^2d$，而$[B':K]=m^2d$。从而推出$[B:K]=\frac{n^2d}{mnd}=\frac{n}{m}$，即$m$整除$n$，且$[A:K]=[B:K][B':K]$，这就证明了3）和4）。

最后，设$B''=C_A(B')$，显然$B\subset B''$，但B'是单代数，论断3）对B'亦真，从而$[B'':K]=[A:K]/[B':K]=[B:K]$，由之推出$B''=B$，定理证毕。

§5 可除代数的子域 域的扩张

我们利用上一节的结果考察中心可除代数的子域。若一个子域不被更大的子域所包含，则称之为**极大子域**，极大子域的概念引起了人们的兴趣。

定理5.1 可除代数D的子域L是极大的，当且仅当$L=C_D(L)$。若可除代数D还是中心的，则$[D:K]=[L:K]^2$，

且$D\otimes L\simeq M_n(L)$，此处$n=[L:K]$。

证：显然，任意包含L的子域包在$C_D(L)$中。因此，若$L=C_D(L)$，则L是极大的。另一方面，若元素$a\in C_D(L)$，但$a\notin L$，若用$f(x)$表域L上的多项式，则形如$f(a)$的元素的集合组成D中的交换子代数，即子域，它严格大于L，这就证明了第一个论断。

现在设D是中心可除代数，L是它的极大子域。则$L=C_D(L)$，从定理4.6知，$[D:K]=[L:K]^2$及$D\otimes L\simeq M_n(L)$（由于L的交换性，$L^0\simeq L$）。最后，从维数的计算立刻得出$n=[L:K]$。

推论5.2 中心单代数的维数总是某个整数的平方。

对任意K-代数A和域K的扩张L，代数$A\otimes L$可以看作L-代数，只要令$ax=x(1\otimes a)$即可，此处$x\in A\otimes L$，$a\in L$。我们把这个L-代数记作A_L，称之为A的**纯量扩张**。显然，$[A_L:L]=[A:K]$。

定理5.1指出，如果L是中心可除代数D的极大子域，则$D_L\simeq M_n(L)$。显然，这时$M_k(D)\otimes L\simeq M_{nk}(L)$。

如果K-代数A是中心的，则定理2.4表明，L-代数A_L也是中心的。特别地，若A是中心单K-代数，则A_L是中心单L-代数。

域L称为中心单代数A的**分裂域**，如果$A_L\simeq M_n(L)$，从定理5.1知，分裂域总是存在的。

但是分裂域不是唯一的，假定某个域是分裂域，则其任意扩张也是分裂域。事实上，就连极小分裂域（不包含其它的分裂域）也不是唯一确定的。（看本章习题6）

下述定理给出了分裂域的某些特征，它在后面很有用

处。

定理5.3 域L是d^2维中心可除代数D的分裂域，当且仅当$[L:K]=md$，且L与代数$M_m(D)$的子代数同构。

证：设$D\otimes L\simeq M_d(L)$。考察单D_L-模，或同样的，单L-D-双模U。U是D上的右向量空间，乘以元素$\alpha\in L$的运算定义了这个空间的一个自同态，此自同态的矩阵记作$T(\alpha)$。我们得到了同态（由于L是域，因而是单同态）T：$L\to M_m(D)$，这里$m=[U:D]$。

另一方面，因为$D_L\simeq M_d(L)$，则$U\simeq dL$且$[U:K]=d[L:K]$。但同时$[U:K]=md^2$，从而$[L:K]=md$。

反之，设L是md维代数$A=M_m(D)$的子域，L'是L的中心化子。这时$L'\supset L$，由定理4.6知，$[L:K][L':K]=[A:K]=m^2d^2$，从而$[L':K]=md=[L:K]$，即$L'=L$，所以$A\otimes L\simeq M_n(L)$，即L是A的分裂域，这就意味着L也是可除代数D的分裂域。

§6 Brauer群 Frobenius定理

我们在§3中指出过，中心单代数类对张量积封闭。对于这一乘法而言，基础域K充当了单位元，因为对任意代数A，$A\otimes K\simeq A$。定理3.1表明，反代数A^0，事实上，“精确到矩阵”，是代数A在这一运算下的逆元。这就得以在中心可除代数的同构类的集合上定义出如下形式的群结构。

在中心可除代数的每一个同构类中取定一个代表元。若D_1和D_2是两个这样的代表元，则$D_1\otimes D_2$是中心单代数，从而同构于某个形如$M_n(D)$的代数，其中D是中心可除代

数。令$D=D_1D_2$。从§2推知，$D_1D_2=D_2D_1$，$D_1(D_2D_3)=(D_1D_2)D_3$。其次，$DK=KD=D$，并根据定理3.1，$DD^0=D^0D=K$。这样，中心可除代数的集合作成了交换群。这个群叫作域K上的**Brauer群**，记作$\mathrm{Br}(K)$。

设L是域K的扩张，则对任意中心可除代数D，L-代数D_L是中心单的，所以它同构于$M_n(D')$，此处D'是L上的中心可除代数。易验，将D对应到D'，我们得到了群同态$\mathrm{Br}(K)\to\mathrm{Br}(L)$。以$L$为分裂域的可除代数组成了这个同态的核。Brauer群的这一子群记作$\mathrm{Br}(L/K)$。定理5.1表明，Brauer群的任意元素都属于某个形如$\mathrm{Br}(L/K)$的子群，即$\mathrm{Br}(K)=\bigcup\mathrm{Br}(L/K)$。

实际去计算Brauer群通常是非常复杂的，这个群的结构仅对某些域K是清楚的。我们限于最简单的情况：实数域和有限域（看第五章）来进行介绍。

当然，若K是代数闭域，则其上没有异于K本身的中心（甚至任意的）可除代数，即它的Brauer群是平凡的。

在实数域R上，至少有一个中心可除代数，即四元数代数H。我们给出一个绝妙的结果，即H是域R上唯一的中心可除代数。

定理6.1 (Frobenius) 实数域R上全部有限维可除代数是：域R本身，复数域C，和四元数代数H。

证 首先设L是域R的有限扩张，a是L的任意元素，$m_a(x)$是元素a在域R上的极小多项式（看第一章§2）。它是既约的，从而或是线性，（此时$a\in R$），或是二次多项式$x^2+2px+q$，这里$p^2<q$。在第二种情况，元素$a+p$是多项式$x^2+(q-p^2)$的根，而$(a+p)/\sqrt{q-p^2}$是多项式x^2+1的

根。因此，域$R[\alpha]$同构于域C。由于域C是代数闭域，$L\simeq C$。

这就是说，域R的有限扩张是R本身和C，所以C是域R上的任意中心可除代数D的分裂域。设$D\neq R, d^2=[D:R]$，L是D中的极大子域。由于$L\neq R$，则$L\simeq C$，从定理5.1知，$d=[C:R]=2$，即$[D:R]=4$。

我们用i记域L中使$i^2=-1$的元素（是元素$i\in C$在同构$C\simeq L$下的像）。复共轭运算是域L的自同构，它把i变为$-i$。由推论4.2知，可以在D中找到非零元素j，使$jij^{-1}=-i$，即$ji=-ij$。

因i，j非交换，故$j\notin L$，即$1, i, j$线性无关。此外，$j^2i=-jij=ij^2$，即$j^2\in C_D(L)=L$。即$j^2=\alpha+\beta i$，此处$\alpha,\beta\in R$。但j^2应当与j交换，所以$j(\alpha+\beta i)=\alpha j+\beta ji=(\alpha+\beta i)j=\alpha j-\beta ji$，$\beta=0$。即$j^2=\alpha\in R$。显然，$\alpha<0$（不然$\alpha=\gamma^2$，而$(j-\gamma)(j+\gamma)=0$是不可能的）。可以用$j$代替$j/\sqrt{-\alpha}$，这时，$j^2=-1$。

这样，我们找到了元素i和j，使$i^2=j^2=-1$，$ji=-ij$，记$k=ij$，则$k^2=ijij=-i^2j^2=-1$；$ik=i^2j=-j$；$ki=iji=-i^2j=j$。类似地，$jk=-kj=i$。换言之，元素i,j,k的乘法就像四元数代数中的同名元素间的乘法。因此，可以建立同态$f: H\rightarrow D$。因为H是可除代数，知f是单同态。但$[H:R]=[D:R]$，所以f是同构。定理证毕。

推论6.2 $\mathrm{Br}(R)=\mathrm{Br}(C/R)$是二阶循环群。

习　题

1．设D是域K上的有限维可除代数。证明，两个D-双

模同构，当且仅当相应的自表示等价（即相差一个代数$M_n(D)$的一个内自同构）．

2．设S,T是有限集，分别在S,T中定义拟序→，A和B是域K上相应的极小代数（看第三章习题8—10）．在卡氏积$S\times T$中引入拟序，规定$(s,t)\to(s',t')$，若$s\to s'$，$t\to t'$．证明，对于卡氏积$A\times B$上这样定义的拟序所对应的极小代数是$A\otimes B$．

3．证明，$C\otimes C\simeq C\oplus C$（$C$作为$R$上的代数）．这个例子表明，单代数的张量积不一定是单代数．

4．从A到A的线性映射∂叫作**代数A的微分**，若任取元素$a,b\in A$，$\partial(ab)=a(\partial b)+(\partial a)b$．

a）证明，取定$x\in A$，由公式$\partial_x a=ax-xa$定义的映射是代数A的微分．叫作**内微分**．

b）证明，若∂是代数A的微分，则由公式：

$$T(a)=\begin{pmatrix} a & \partial a \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

定义的映射T：$A\to M_2(A)$是代数同态．

c）证明，任意中心单代数的微分是内微分．（提示：利用论断b）和Skolem-Noether定理．）

5．设A是单代数，B是它的中心单子代数，$B'=C_A(B)$，证明：a）B'是单代数；b）$[B:K][B':K]=[A:K]$；c）若$B'\simeq M_m(D)$，则$A\otimes B^0\simeq M_n(D)$，并且$m$整除$n$．

举出一个例子，使$C_A(B')\neq B$

6．考察有理数域Q上的代数D，它以$\{1, i, j, k\}$为基，有下述乘法表：

	i	j	k
i	-1	k	$-j$
j	$-k$	2	$-2i$
k	j	$2i$	2

（验证这是代数）．

a）证明，D 是中心可除代数．

b）验证，$L_1=Q[i]$ 及 $L_2=Q[j]$ 是 D中不互相同构的极大子域．

7．证明，若 D_1，D_2 是域K上的中心可除代数，且知$[D_1:K]$ 与 $[D_2:K]$ 互素，则 $D_1\otimes D_2$ 也是可除代数．（提示：令$D_1\otimes D_2=M_n(D)$，用两种方法计算$D_1\otimes D_2\otimes D_2°$，从中得到 n 整除$[D_2:K]$．）

8．（Dickson **定理**）证明，中心可除代数的两个元素共轭，当且仅当它们有相同的极小多项式．

9．（Hilbert **定理**）设 L 是域，ϕ 是域 L 的自同构．考察形如 $\sum\limits_{i\gg-\infty}^{\infty}a_it^i$ 的"幂级数"，此处 $a_i\in L$，t 是某个符号（"变量"），记号 $i\gg-\infty$表明，这一级数中仅含有限个负指数．级数的加法定义如常 $\sum\limits_{i\gg-\infty}^{\infty}a_it^i+\sum\limits_{i\gg-\infty}^{\infty}b_it^i=\sum\limits_{i\gg-\infty}^{\infty}(a_i+b_i)t^i$，而乘法根据公式：$ta=\varphi(a)t$（$a\in L$）和 $a\sum\limits_{i\gg-\infty}^{\infty}a_it^i$

$$= \sum_{i=-\infty}^{\infty} (aa_i)t^i \text{ 定义。}$$

a）验证，在如上定义的运算之下，级数的集合组成可除代数$L[[t, \varphi]]$。称为Hilbert可除代数。

b）设$K = \{a \in L \mid \varphi(a) = a\}$，$n$是$\varphi$的阶，即使$\varphi^n$成恒等映射的最小自然数（若这种自然数不存在，则阶为∞）证明：当$n \neq \infty$时，Hilbert可除代数的中心是$K[[t^n]]$，若$n = \infty$，则为K。

c）构造一个无限维中心可除代数的例子。（提示：把有理函数域$K(x)$当作L。）

第五章　Galois 理论

在本章中，我们以双模和张量积为工具研究域 K 的扩张，即 Galois 理论。

§1　域论初步

我们要用到域的结构及其扩张的一些已知结果。

设 K 是任意域，p 是满足

$$p\cdot 1 = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{p\text{次}} = 0$$

的最小自然数，如果这样的数存在，则称 p 为域 K 的特征。

如果这个数不存在，即任取自然数 m，$m\cdot 1 \neq 0$，则称域 K 的特征是 0。因为从不等式 $p = mn$ 可得 $p1 = (m1)(n1)$，域 K 的特征一定是素数（或 0）。

设域 K 的特征为 0，这时从 $n \neq m$ 得 $m1 \neq n1$，可以将元素 $n1$ 与数 n 等同起来，认为域 K 包有自然数集合。又 $(-n)1 = -n1$，把 $-n1$ 与数 $-n$ 视为等同，将整数集看作域 K 的子集（子环）。最后，考察表达式 $n1/m1$，我们可以把整个有理数域 Q 嵌入域 K。

如果域 K 的特征是素数 p，情况更加简单：这时，形如 $n1$（$0 \leqslant n < p$）的元素本身组成了一个域，与模 p 的同余类域 $F(p)$ 同构。

显然，域 Q 和 $F(p)$ 不再包有真子域。具有这种性质的域叫作**素域**。将我们的讨论综合起来，得到下述定理。

定理1.1 任意域 K 都包含一个素域，同构于 Q（当 K 的特征是 0），或 $F(p)$（当 K 的特征是 p，$p>0$）。

推论1.2 若域 K 是有限的，则 K 中元素的个数等于 p^n，此处 p 是素数。

证：有限域的特征不会是 0，即对某个素数 p，$K\supset F(p)$ 而 K 是 $F(p)$ 的有限扩张。在 K 中取一组基，立刻得到 K 由 p^n 个元素组成，此处 $n=[K:F(p)]$。

我们的兴趣基本上在于给定域 K 的有限扩张。在这种扩张的构造与研究中，下述结果有重要作用。

定理1.3 (Kronecker) 设 $p(x)$ 是域 K 上的既约多项式，$(p(x))$ 是 $K[x]$ 中由 $p(x)$ 的倍多项式组成的理想：$(p(x))=\{p(x)g(x)\,|\,g(x)\in K[x]\}$。则 $K[x]/(p(x))$ 是一个域，在此域中多项式 $p(x)$ 有根。反之，若 L 是域 K 的扩张，$p(x)$ 在 L 中有根 a，则 $K[a]\simeq K[x]/(p(x))$。

证：记 $I=(p(x))$，在商代数 $K[x]/I$ 中考察类 $\overline{x}=x+I$。由商代数中运算的定义知 $p(\overline{x})=p(x)+I=0$。即 $\overline{x}$ 是 $p(x)$ 的根。再来验证 $K[x]/I$ 是域。

设 $\overline{f}=f(x)+I$ 是 $K[x]/I$ 中的非 0 元，即 $f(x)\notin I$。这时多项式 $f(x)$ 与 $p(x)$ 互素。所以存在多项式 $h(x)$ 和 $g(x)$，使 $1=f(x)h(x)+p(x)g(x)$。记 $\overline{h}=h(x)+I$，在商代数 $K[x]/I$ 中，有 $\overline{f}\,\overline{h}=1$。

反之，设 L 是 K 的扩域，$a\in L$ 是 $p(x)$ 的根。这时 $p(x)=m_a(x)$。定义同态 φ：$K[x]\to L$，$\varphi(f(x))=f(a)$，从同态基本定理得到 $K[a]\simeq K[x]/I$。

扩张 $K[x]/I$ 是有限的：若 $p(x)$ 的次数为 n，易验 1，$\bar{x}$，$\bar{x}^2$，…，$\bar{x}^{n-1}$ 是 $K[x]/I$ 的基。

从 Kronceker 定理可得下述重要推论。设 $f(x)$ 是域 K 上的任意多项式，$p(x)$ 是它的既约因子。这时在域 $K_1 = K[x]/(p(x))$ 中多项式 $p(x)$，从而 $f(x)$ 有根 a_1，按照 Bezout 定理，$f(x) = (x-a_1)f_1(x)$。继续这一过程，我们得到了一系列扩张[9] $K \subset K_1 \subset \cdots$，这样，在 K_i 当中，多项式 $f(x)$ 有 i 个根（包括重根）。由此可知，若 $f(x)$ 的次数为 n，则在域 K_n 中，$f(x)$ 可以分解成线性因子。

称 L 为多项式 $f(x)$ 的**分裂域**，如果 $f(x)$ 可以在 L 中分解成线性因子，而在 L 的任意真子域中，$f(x)$ 都不能分解成线性因子。

定理1.4 任取多项式 $f(x) \in K[x]$，则 $f(x)$ 的分裂域 L 存在，且任意两个分裂域同构。

证：分裂域的存在性从上述说明中得到。今对 $f(x)$ 的次数 n 做归纳法证明其唯一性。归纳的基础 $n=1$ 是平凡的：此处 $L=K$。

设 $f(x)$ 是 n 次多项式，L 和 L' 是它的分裂域，$p(x)$ 是 $f(x)$ 的既约因子（在域 K 上）。这时 $p(x)$ 在 L 中有根 a，在域 L' 中有根 a'。从 Kronecker 定理知，域 $K[a]$ 与 $K[a']$ 同构。将二者等同起来，可以认为 L 与 L' 包含公共的子域 $K_1 = K[a]$。

但这时 L 与 L' 是域 K_1 的扩张，而且是 K_1 上的 $n-1$

---

(9) 应当指出，在这个序列中，包含关系不一定严格。例如，若 $P(x)$ 是线性多项式，则 $K_1 = K$。

次多项式 $f_1(x)=f(x)/(x-a)$ 的分裂域。由归纳假设，$L\simeq L'$，即为所证。

现在来证明分裂域 L 是基础域 K 上的有限扩张。由于 L 是由 K 的一系列有限扩张得到的域 K_n 的子域，我们的论断是下述结果的特例。

定理1.5 若 $K=K_0\subset K_1\subset\cdots\subset K_{n-1}\subset K_n$ 是一系列域，对任意 i，K_{i+1} 是 K_i 的有限扩张，则 K_n 是 K 的有限扩张，且 $[K_n:K]=\prod_{i=1}^{n}[K_i:K_{i-1}]$。

证：显然只需证 $n=2$ 的情形，一般结果可由归纳法得出。

设 $K\subset F\subset L$，且 $[F:K]=n$，$[L:F]=m$。取 F 在 K 上的一组基 $\{a_1, \cdots, a_n\}$，和 L 在 F 上的基 $\{b_1, \cdots, b_m\}$。这时任意 F 的元素形如 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i a_i$，此处 $\alpha_i\in K$，而任意 L 的元素形如 $\sum_{j=1}^{m}\beta_j b_j$，此处 $\beta_j\in F$，若将 β_j 写成 $\beta_j=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}a_i$，$\alpha_{ij}\in K$，我们得到 $\sum_{j=1}^{m}\beta_j b_j=\sum_{i,j}\alpha_{ij}a_i b_j$，$\alpha_{ij}\in K$，即 $\{a_i b_j\}$ 是 K 上向量空间 L 的生成元素。另一方面，若 $\sum_{i,j}\alpha_{ij}a_i b_j=0$，从 $\{b_j\}$ 在 F 上的线性无关性知，$\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}a_i=0$ 对任意 j 成立，又从 $\{a_i\}$ 在 K 上的线性无关性知，$\alpha_{ij}=0$ 对一

切i，j成立，即元素a_ib_j在域K上线性无关。于是，我们得到域L在域K上的一个基$\{a_ib_j\}$，它包含nm个元素，这就证明了定理。

§2 有限域 Wedderburn 定理

我们利用以前得到的结果来描述有限域，（甚至任意有限除环！）先证明一个有关交换群的预理。

预理2.1 若在交换群G中有m阶和n阶元素，则G有k阶元素，此处k是m和n的最小公倍数。

证：设x是m阶元，y是n阶元。若m、n互素，则$k=mn$，且$(xy)^k=x^ky^k=1$。反之，若$(xy)^l=1$，则$x^l=y^{-l}$，元素x^l与y^l有相同的阶。但元素x^l的阶是m的因子，而y^l的阶是n的因子，从而$x^l=y^l=1$，即l被m与n除尽，所以被k除尽。

在一般情况下，我们将m和n分解成素因子的乘积，并对每一个素数p，在m或n中取出形如p^t的因子，此处t是p在k中出现的次数。这时m与n分解为乘积$m=m_0m'$，$n=n_0n'$，$k=m_0n_0$，且m_0与n_0互素。

元素$x'=x^{m'}$和$y'=y^{n'}$有相应的阶m_0，n_0，因此元素$x'y'$的阶是$m_0n_0=k$，即为所证。

下述定理是这个预理的直接推论。

定理2.2 域的乘法群的有限子群是循环的。特别地，有限域的乘法群总是循环的。

证：设G是域K的乘法群的子群，有n个元素。从引理2.1知，在G中有元素g，其阶为m，G的任意元素的阶

整除 m。因此任取元素 $a\in G$，$a^m=1$，即 G 的任意元素是方程 $x^m-1=0$ 的根。从而 $n\leqslant m$。这就立刻推出 $n=m$，g是群 G 的生成元。

定理2.3 对任意素数 p 和任意自然数 n，存在唯一（在同构意义下）一个 p^n 元域。

证：设 $K=F(p)$，考察 K 上的多项式 $f(x)=x^{p^n}-x$。令 L 为其分裂域，S 是 $f(x)$ 在 L 当中的根的集合。由于 $f'(x)=-1$，$f(x)$ 没有重根，即 S 由 p^n 个元素组成。但 $a\in S$，当且仅当 $a^{p^n}=a$，运用 Newton 二项式定理，易见 $(a+b)^{p^n}=a^{p^n}+b^{p^n}$，又因为 $(ab)^{p^n}=a^{p^n}b^{p^n}$，及 $(a^{-1})^{p^n}=(a^{p^n})^{-1}$，从而 S 是 L 中的域，所以 $S=L$，即 L 由 p^n 个元素组成。

现在设 L' 是任意 p^n 元域，G 是域 L' 的乘法群。G 由 p^n-1 个元素组成，所以对任意 $a\in G$，$a^{p^n-1}=1$ 因而 $a^{p^n}=a$，但上述等式对 $a=0$ 亦真，即 L' 的所有元素都是方程 $x^{p^n}-x=0$ 的根。由于它们恰好是 p^n 个，所以 L' 是 $f(x)$ 的分裂域，由定理 1.4 知，$L'\simeq L$。

从定理 2.3 可以看到，有同样多个元素的有限域彼此同构。结合 Skolem-Neother 定理，便引出了下述绝妙的结果。

定理2.4(Wedderburn) 任意有限可除代数都是交换的，即是一个域。

证：设 D 是有限除环，则其中心 K 是某个有限域。设 $[D:K]=d^2$，对 K 上可除代数 D 的任意极大子域 L，都有 $[L:K]=d$，显然，它们都由同样多个元素组成，所以彼此同构。根据 Skolem-Noether 定理，它们是共轭的。另一方

面，任取元素 $a\in D$，都属于某一个极大子域。因此若 G 是可除代数 D 的乘法群，H 是这种极大子域 L 的乘法群，则 $G=\bigcup gHg^{-1}$，此处 g 跑遍 G。我们指出，$H\neq G$ 是不可能的。

我们用 n 表 G 的阶，m 表 H 的阶。从 $G=\bigcup gHg^{-1}$ 推出 $n<mk$，此处 k 是形如 gHg^{-1} 的不同子群的个数（因为它们都含有单位元）。但若 $g_1=gh$，$h\in H$，则 $g_1Hg_1^{-1}=gHg^{-1}$，从而 k 不超过 H 在 G 中的指数 i。这与 Lagrange 定理矛盾，因为根据后者应有 $n=mi$。

这样必有 $H=G$，即 $L=D$。定理证毕。

§3 分离扩张

现在转来研究任意域的有限扩张，像前一章一样，代数 $L\otimes L$（此处 $L^0=L$）将起重要作用。因此需要关于域的张量积的结构的情况。

下面，我们需要利用在一些不同域上（基础域 K 上，以及 K 的任意扩张上）的张量积。在域 $L\supset K$ 上的向量空间（或代数）的张量积记作 $\otimes_L$，这时易验，命题Ⅳ.2.3的结合公式变成了更一般的形式。如果 $L\subset M$ 是域 K 的两个扩张，U 是 L 上的向量空间，V 和 W 是 M 上的向量空间，则 $(U\otimes_L V)\otimes_M W\simeq U\otimes_L(V\otimes_M W)$。这个公式的证明留给读者。我们将把 $\otimes_K$ 简记作 $\otimes$。

先考察最简单的情况，有一个因子是单扩张，即形如 $K[a]$。

命题3.1 设 L 和 F 是域 K 的有限扩张，且 $F=K[a]$，

a 在K上的极小多项式是 $p(x)$。这时 $L\otimes F \simeq L[x]/(p(x))$。

证：显然，$L\otimes F$ 作为 L-代数是独生代数：$L\otimes F = L[1\otimes a]$。因此将 $f(x)\in L[x]$对应到元素 $f(1\otimes a)\in L\otimes F$，我们就得到 $L[x]$ 到 $L\otimes F$ 上的同态。

这样 $L\otimes F\simeq L[x]/(m(x))$，此处 $m(x)$ 是 $1\otimes a$ 在 L 上的极小多项式。但显然 $p(1\otimes a) = 1\otimes p(a) = 0$，且元素 1，$1\otimes a$，…，$1\otimes a^{n-1}$（n 是 $p(x)$ 的次数）在 L 上线性无关。从而 $m(x) = p(x)$。命题证毕。

预理3.2 若 $f(x) = f_1(x)\cdots f_t(x)$，多项式 $f_1(x),\cdots,f_t(x)$两两互素，则 $K[x]/(f(x))\simeq \prod_{i=1}^{t} K[x]/(f_i(x))$。

证：记 $I = (f(x))$，$I_i = (f_i(x))$。我们将商代数 $K[x]/(f(x))$中的每个类 $g(x) + I$ 对应到$(g(x) + I_1,\ g(x) + I_2,\ \cdots,\ g(x) + I_t)\in \prod_{i=1}^{t} K[x]/I_i$。这显然是代数同态并且是单的，因为若 $g(x)$ 被全部 $f_i(x)$ 整除，则由互素性知 $g(x)$ 被它们的乘积 $f(x)$整除。但代数 $K[x]/I$ 的维数是 n，此处 n 等于 $f(x)$的次数，而代数 $K[x]/I_i$ 的维数是 n_i，n_i 等于 $f_i(x)$ 的次数。由于 $K[x]/I$ 与 $\prod_{i=1}^{t} K[x]/I_i$ 的维数相等，这个单同态必须是同构。

推论3.3 代数 $K[x]/(f(x))$ 是半单的，当且仅当多项式 $f(x)$没有重既约因子。

证：设 $f(x) = p_1(x)\cdots p_s(x)$，此处 $p_1(x),\cdots,p_s(x)$是

不同的两两互素的多项式，则 $K[x]/(f(x)) \simeq \prod_{i=1}^{t} K[x]/(p_i(x))$，而 $K[x]/(p_i(x))$ 是域（根据 Kronecker 定理），即此代数是半单的。若 $f(x)=p^2(x)g(x)$，则易见 $p(x)g(x)$ 所在的类是 $K[x]/(f(x))$ 中的非 0 幂零元。

推论3.4 在命题3.1的条件下，代数 $L\otimes F$ 半单，当且仅当多项式 $p(x)$ 在域 L 上没有重既约因子。

推论3.5 设 $F=K(a)$ 是单扩张，且 a 是其极小多项式 $p(x)$ 的单根。则对任意半单交换代数 A，$A\otimes F$ 半单。

证：按 Weierstrass-Dedekind 定理将 A 分解成域的直积，由之我们看到，只要验证形如 $L\otimes F$ 的代数的半单性即可，此处 L 是域。根据推论3.4，需要证明，$p(x)$ 在 L 中没有重既约因子。

设 $g(x)$ 是 $p(x)$ 在域 L 上的重既约因子，L' 是 L 的扩张，在 L' 中 $g(x)$ 有根 b。b 是 $p(x)$ 的重根。但由 Kronecker 定理，$K[b]\simeq K[a]$，从而 a 是 $p(x)$ 的重根，与所设矛盾。

域 K 上的既约多项式 $p(x)$ 称为**分离的**，若在 K 的任意扩域中，$p(x)$ 均无重根。推论3.5的证明指出，对于这一点，只要 $p(x)$ 在某个扩域中有一个单根即可。

有限维可除代数的元素 a 称为**分离的**，若它的极小多项式是分离的。

定理3.6 对域 K 的任意有限扩张 L，下述条件等价：

1）$L\otimes L$ 是半单代数；

2）任取半单交换代数 A，代数 $A\otimes L$ 半单；

3）域 L 的任意元素是分离的；

4) $L=K[a_1, \cdots, a_t]$，此处元素 a_i（$i=1, \cdots, t$）是分离的。

证：2)⇒1)和3)⇒4)显然。

1)⇒3) 设 a 是 L 的非分离元，$F=K[a]$。则 a 是自身的极小多项式的重根，由推论3.4，$L\otimes F$ 不是半单代数，代数 $L\otimes L\supset L\otimes F$ 也不是半单的。

4)⇒2) 对 t 作归纳。归纳的基础 $t=1$ 的情形是推论3.4。记 $F=K[a_t]$。则 F-代数 $A_F=A\otimes F$ 半单。但 $A\otimes L\simeq A_F\otimes_F L$，而 $L=F[a_1, \cdots, a_{t-1}]$，由归纳假设 $A\otimes L$ 半单。定理证毕。

满足定理3.6的诸等价条件的扩张叫作**分离扩张**。

推论3.7 给出域的升链 $K=K_0\subset K_1\subset\cdots\subset K_n=L$，此处 K_i 是 K_{i-1} 的有限扩张，则 L 在 K 上是分离的，当且仅当每一个 K_i 在 K_{i-1} 上是分离的。

证：只要证 $n=2$ 时成立即可。若 K_1 在 K 上分离，而 L 在 K_1 上分离，则 $L\otimes L\simeq L\otimes(K_1\otimes_{K_1}L)\simeq A\otimes_{K_1}L$，此处 $A=L\otimes K_1$ 是半单代数。所以 $L\otimes L$ 是半单代数，即 L 在 K 上分离。

另一方面，$K_1\otimes K_1$ 是 $L\otimes L$ 的子代数，所以从 $L\otimes L$的半单性可知 $K_1\otimes K_1$ 的半单性。考察代数 $L\otimes_{K_1}L$ 并给出映射 f: $L\otimes L\to L\otimes_{K_1}L$，将 $a\otimes b$ 变为 $a\otimes_{K_1}b$。易验，f 是满的代数同态。这说明 $L\otimes_{K_1}L$ 同构于 $L\otimes L$ 的商代数。但半单代数的商代数是半单的，因此，从 L 在 K 上的分离性得到 L 在 K_1 上的分离性。

域 K 称为**完全的**，若 K 的任意有限扩张都是分离的，或 $K[x]$的任意既约多项式都是分离的。易得下述关于完全

性的检验准则。

定理3.8 特征为0的域是完全的。特征为p的域K是完全的，当且仅当任取$\alpha\in K$，方程$x^p=\alpha$可解。

证：若$f(x)$是既约多项式，$f'(x)$是其导数，则f与f'或者互素，或f整除f'，显然，后者仅当$f'(x)=0$时才有可能。设$f(x)=\alpha_0x^n+\alpha_1x^{n-1}+\cdots+\alpha_n$，$\alpha_0\neq 0$，则$f'(x)=n\alpha_0x^{n-1}+(n-1)\alpha_1x^{n-2}+\cdots+\alpha_{n-1}$。若$K$是特征0的域，则$n\alpha_0\neq 0$，即$f'(x)\neq 0$，故$f$与$f'$互素。所以$f(x)$在域$K$的任意扩张中没有重根，是分离的。若$K$是特征$p$的域，则$f'(x)=0$当且仅当$f(x)$形如$\beta_0x^{pk}+\beta_1x^{p(k-1)}+\cdots+\beta_k$。设方程$x^p=\beta_i$有解$\gamma_i\in K$。则$f(x)=(\gamma_0x^k+\gamma_1x^{k-1}+\cdots+\gamma_k)^p$，即$f(x)$可约。若方程$x^p=\alpha$对某个$\alpha\in K$无解，则在多项式$f(x)=x^p-\alpha$的分裂域中，等式$f(x)=(x-\beta)^p$成立，此处$\beta^p=\alpha$，从而得到多项式$f(x)$的不可分离性。定理证毕。

推论3.9 有限域是完全的。

证：设K是特征p的有限域，φ：$K\to K$将元素α变为α^p，若$\alpha^p=\beta^p$，由$\alpha^p-\beta^p=(\alpha-\beta)^p$推出$\alpha=\beta$，$\varphi$是单射。从$K$的有限性知，$\varphi$是一一对应，这就是所要证明的。

§4 正规扩张 Galois 群

我们现在来研究本章的基本问题，有限扩张的自同构。利用在第四章（§1，例2,3）中建立的自同构与双模之间的联系。

设L是域K的有限扩张，σ是L的自同构。则${}_\sigma L$是L-双

模，其中 L 的算子作用在右边，如同正则 L-模，而左边按公式 $ax = x\sigma(a)$ 定义。反之，若 M 是 L-双模，具有 $[M:L] = 1$[10]，则作为右 L-模 $M \simeq L$，将元素 $a \in L$ 与右 L-模 M 的自同态 $x \to ax$ 视为同一，可得同态 $L \to E_L(M) \simeq L$，即域 L 的自同构。所以，对于自同构 σ，$M \simeq {}_\sigma L$，易验，${}_\sigma L \simeq {}_\tau L$，当且仅当 $\sigma = \tau$。

于是，我们建立了域 L 的自同构集合与一维（在 L 上）L-双模的同构类之间的一一对应。一维双模显然是单的，这样，当把它看作 $L \otimes L$ 上的模，我们便得到下述结果。

定理4.1 域 L 的自同构与同构于 L 的，代数 $L \otimes L / \mathrm{rad}(L \otimes L)$ 的单分量之间存在着一一对应。

从维数的简单计算可得下述推论。

推论4.2 域 L 的互不相同的自同构的个数不超过 $[L:K]$，仅当 L 分离时它才可能等于 $[L:K]$。

若 L 恰有 $[L:K]$ 个不同的自同构，则称 L 为**正规的**。根据定理4.1，这就等价于有同构 $L \otimes L \simeq L^n$。正规扩张永远是分离的。

推论4.3 若域 K 的扩张 L 是正规的，而 $K \subset K_1 \subset L$，则域 K_1 的扩张 L 也是正规的。

证：$L \otimes_{K_1} L$ 是 $L \otimes L$ 的商代数（看推论3.7的证明），而 L^n 的任意商代数形如 L^m，其中 $m \leqslant n$。

域 K 的扩张 L 的自同构显然组成一个群，记作 $G(L/K)$。当扩张是正规的，$G(L/K)$ 称为它的**Galois 群**。

---

(10) 原则上说，要区别 M 在 L 上的左维数和右维数，但从维数的有限性知，它们是相等的，都等于 $[M:K]/[L:K]$。

域 L 的元素 a 叫作**自同构 σ 的不动点**，若 $\sigma(a)=a$。这就等价于说，在双模 $_{\sigma}L$ 中，$ax=xa$ 对任意 $x\in{}_{\sigma}L$ 成立。若 H 是 $G(L/K)$ 的子集，称元素 $a\in L$ 是 H的 **不动点**，若任取 $\sigma\in H$，a 是 σ 的不动点。子集 H 的不动点组成 L 的子域，叫作 H 的**不动域**，记作 $\mathrm{Inv}H$。

定理4.4 下述条件等价：

1）域 K 的扩张 L 正规；

2）$\mathrm{Inv}G(L/K)=K$；

3）L 是某个分离多项式 $f(x)\in K[x]$ 的分裂域。（多项式称为分离的，若其既约因子都是分离的。）

证：1）⇒2） 记 $K_1=\mathrm{Inv}G(L/K)$。则 L 是 K_1 的扩张，且 $G(L/K)=G(L/K_1)$，这在 $K_1\neq K$ 时是不可能的，因为群 $G(L/K)$ 的阶等于 $[L:K]$。

2）⇒3） 设 a 是 L 的任意元素。将 $G(L/K)$ 中的一切自同构作用于 a，并写出所得到的全部不同的元素：$a=a_1$，a_2，…，a_k。考察多项式 $f(x)=(x-a_1)\cdots(x-a_k)$。它在任意自同构 $\sigma\in G(L/K)$ 下不变。所以 $f(x)\in K[x]$。也就是说，a 是 $K[x]$ 上的分离多项式的根，它在域 L 中分解成线性因子。

在 L 中取某个生成元系（例如基）$L=K[\omega_1,\cdots,\omega_l]$，并对每个 ω_i 建立分离多项式 $f_i(x)$，$f_i(x)$ 有根 ω_i，且在 L 中分解成线性因子。则 L 是域 K 上的分离多项式 $f(x)=f_1(x)\cdots f_l(x)$ 的分裂域。

3）⇒1） 对多项式 $f(x)$ 的次数 d 作归纳法。归纳的基础 $d=1$ 的情形是平凡的（$L=K$）。设对 $d-1$ 次多项式定理真。

令 $L=K[\omega_1, \cdots, \omega_t]$，此处 ω_i 是 $f(x)$ 的根。记 $K_1=K[\omega_1]$，L 是 K_1 上的 $d-1$ 次多项式 $f(x)/(x-\omega_1)$ 的分裂域，所以 L 在 K 上正规：$L\otimes_{K_1}L\simeq L^m$，但 $L\otimes L\simeq(L\otimes K_1)\otimes_{K_1}L$。我们来说明 $L\otimes K_1$ 的结构。设 $p(x)$ 是元素 ω_1 的极小多项式。它是分离的且在 L 中分解成线性因子：$p(x)=(x-a_1)\cdots(x-a_s)$ （$a_1=\omega_1$，a_1，$\cdots$，a_s 两两不同）。但 $K[a_i]\simeq K_1$ 给出了 s 个不同的同态 σ_i：$K_1\to L$，且 $s=[K_1:K]$。相应地可以建立 s 个 L 上的一维 K_1-L 双模 ${}_{\sigma_i}L$。所以 $L\otimes K_1$ 有一商代数，它同构于 L^s，对维数的简单计算表明，$L\otimes K_1\simeq L^s$ 且 $L\otimes L\simeq L^s\otimes_{K_1}L\simeq L^{ms}$。定理证毕。

推论4.5 对域 K 的任意分离扩张 L，都存在着正规扩张 L' 包有 L。

证：设 $L=K[\omega_1, \cdots, \omega_t]$ 此处 ω_i 是分离多项式 $f_i(x)$ 的根，则 L' 可以取多项式 $f(x)=f_1(x)\cdots f_t(x)$ 的分裂域。

§5 Galois 理论的基本定理

在本节中，我们将证明域论的一些中心定理：关于正规基的定理和 Galois 理论的基本定理。先给出下述有用的结果。

预理5.1 设 A 是域 K 上的代数，M、N 是 A-模，L 是域 K 的扩张，$A_L=L\otimes A$，$M_L=L\otimes M$，$N_L=L\otimes N$（M_L 和 N_L 显然可以看作 A_L-模）。若 $M_L\simeq N_L$ 是 A_L-模同构，则 $M\simeq N$ 是 A-模同构。

证：将 M_L 和 N_L 看作 A-模。因为 L 是域 K 上的 n 维向量空间，有 $M_L\simeq nM$ 及 $N_L\simeq nN$。从而 $nM\simeq nN$ 再由

Krull-Шмидт定理得到$M\simeq N$。

设L是域K的扩张，$G=G(L/K)$，KG是域K上G的群代数（看第一章§1 例6）。则L可看作左KG-模，为此，对任意$a\in L$，令$\left(\sum_{g\in G}\alpha_g g\right)a=\sum_{g\in G}\alpha_g g(a)$即可。

定理5.2 扩张L是正规的，当且仅当L作为左KG-模与左正则KG-模同构。

证：如果作为左KG-模，$L\simeq KG$，则$[KG:K]=[L:K]$但$[KG:K]=(G:1)$（群G的阶），从而L是正规的。

反之，设L是正规扩张。将$L\otimes L$看作代数$L\otimes KG\simeq LG$上的左模。由预理5.1，我们只须证明$L\otimes L\simeq LG$。

但$L\otimes L$作为自身上的模（或L上的双模），分解成直和$L\otimes L\simeq \bigoplus_{\sigma\in G}{}_\sigma L$。设$1=\sum_{\sigma\in G}e_\sigma$是对应的单位元的分解。易验，映射$x\to gx$是代数$L\otimes L$的自同构，所以$ge_\sigma$是这个代数的本原幂等元，由定理Ⅱ.5.1，有元素$\tau\in G$，使$ge_\sigma=e_\tau$。从双模${}_\tau L$的定义易知，任取$a\in L$，$age_\sigma=ge_\sigma\tau(a)$。

因为对$x=\Sigma a_i\otimes b_i\in L\otimes L$，$gx=\Sigma a_i\otimes gb_i$，而对任意$a\in L$有$ax=\Sigma aa_i\otimes b_i$，$agx=gax$。从而 $age_\sigma=gae_\sigma=g(e_\sigma\sigma(a))=ge_\sigma(g\sigma(a))$，即$\tau=g\sigma$。

也就是说$ge_\sigma=e_{g\sigma}$。将元素$\sigma\in LG$与元素e_σ对应起来，就得到LG-模同构$LG\simeq L\otimes L$*)。定理证毕。

我们指出，KG-模同构$L\simeq KG$意味着存在元素$\omega\in L$，

*) $\{\sigma\in G\}$是LG在L上的一个基，$\{e_\sigma,\ \sigma\in G\}$是$L\otimes L$在$L$上的一个基，由此两基所决定的同构是模同构——译者注

使元素$\sigma(\omega)$，当σ跑遍G时组成L的基。这种形状的基称为**正规基**，而定理 5.2 是关于正规基的定理。

推论5.3 正规扩张是单扩张。

证：取元素ω，使$\sigma(\omega)$组成扩域的基，则$\sigma(\omega)$是极小多项式$m_\omega(x)$的根，其次数等于L的维数，从而$L=K[\omega]$。

从正规基定理立即推出 Galois 理论的基本定理。

定理5.4 设L是域K的正规扩张，$G=G(L/K)$。任取L的子域F，用$\text{Inv}F$表示G中的子群，它由全体使$\sigma(a)=a$的元素σ构成，其中a是F的任意元素。这时有：

1) 任取子群$H\subset G$，$\text{Inv}(\text{Inv}H)H$，而任取子域$F\subset L$，$\text{Inv}(\text{Inv}F)=F$；

2) 将子群H与子域$\text{Inv}H$对应起来，可以得到 Galois 群的子群与L的子域之间的一一对应，并且$H\supset H_1$，当且仅当$\text{Inv}H\subset\text{Inv}H_1$；

3) 任取子域F，$\text{Inv}F\simeq G(L/F)$；

4) 子域F是正规的，当且仅当$\text{Inv}F$是正规子群，这时$G(F/K)\simeq G/\text{Inv}F$。

证：显然，$\text{Inv}(\text{Inv}H)\supset H$，而$\text{Inv}(\text{Inv}F)\supset F$。计算域$\text{Inv}H$的维数。为此，我们利用左$KG$-模的同构对应$L\simeq KG$。在这个同构对应下，$\text{Inv}H$映成子空间$V\subset KG$，它由满足$\sigma x=x$的元素$x$组成，此处$\sigma$取遍$H$。将$x$写成$x=\sum\limits_{g\in G}\alpha_g g$的形状，则对$H$的任意元素$\sigma$，$\sigma x=\sum\limits_{g\in G}\alpha_g(\sigma g)$，从而$\alpha_g=\alpha_{\sigma(g)}$，对$G$的确定元素$g$，形如$\sum\limits_{\sigma\in H}\sigma g$的元素组成$V$的基。这种形状的不同元素的个数等于$H$在$G$中的

陪集的个数，即$(G:H)$。从而$[\mathrm{Inv}H:K]=(G:H)$。

另一方面，域L在任意子域F上正规（推论4.3）．从而有$[L:F]$个L的自同构，使F的元素不动，即群$\mathrm{Inv}F$的阶等于$[L:F]$。

特别地，群$\mathrm{Inv}(\mathrm{Inv}H)$的阶等于

$[L:\mathrm{Inv}H]=[L:K]/[\mathrm{Inv}H:K]=(G:1)/(G:H)=(H:1)$，从而$\mathrm{Inv}(\mathrm{Inv}H)=H$。类似地，域$\mathrm{Inv}(\mathrm{Inv}F)$的维数等于$(G:\mathrm{Inv}F)=(G:1)/(\mathrm{Inv}F:1)=[L:K]/[L:F]=[F:K]$，有$\mathrm{Inv}(\mathrm{Inv}F)=F$，这就完成了论断1)和2)的证明，并顺便建立了同构$G(L/F)\simeq\mathrm{Inv}F$。

现在计算$\mathrm{Inv}(g(F))$，此处g是G的任意同构．如$\sigma\in\mathrm{Inv}(g(F))$，则$\sigma g(a)=g(a)$对任意$a\in F$成立，也就是$g^{-1}\sigma g(a)=a$　而　$g^{-1}\sigma g\in\mathrm{Inv}F$．　从而　$\mathrm{Inv}(g(F))=g(\mathrm{Inv}F)g^{-1}$．若$\mathrm{Inv}F$是正规子群，则$\mathrm{Inv}(g(F))=\mathrm{Inv}F$，即任取$g\in G$，$g(F)=F$。这样，域$L$的任意自同构均可诱一个自导出域$F$的自同构，不难验证，若$g$与$h$诱导出域$F$的同同构，当且仅当它们属于$\mathrm{Inv}F$的同一个陪集．我们得到$F$在$K$上的$(G:\mathrm{Inv}F)$个同构．因为$(G:\mathrm{Inv}F)=[F:K]$，所以$F$是正规的，且$G(F/K)\simeq G/\mathrm{Inv}F$。

反之，若F是正规的，则根据定理4.4，F是分离多项式$f(x)\in K[x]$的分裂域．因为域L的任意自同构g将$f(x)$的根仍然变成$f(x)$的根，故$g(F)=F$，且$g(\mathrm{Inv}F)g^{-1}=\mathrm{Inv}F$，也就是说$\mathrm{Inv}F$是正规子群，定理证毕。

推论5.5　域K的分离扩张L仅包含有限个子域。

证：若L是正规的，从Galois理论的基本定理立得，因为有限群只有有限个子群．对一般情况，只须将L嵌入某

个正规扩域中（这可根据推论4.5做到）。

推论5.6 分离扩张是单扩张。

证：由定理2.3和4.4知，有限域的任意扩张是正规的，因此是单扩张（看推论 5.3）。所以可以认为基础域 K 是无限的。

域 K 的分离扩张仅有有限个子域。若 a 是 L 的元素，不属于任何一个真子域，显然 $L=K[a]$。所以证明归结为线性代数的这样一个事实。

预理5.7 无限域上的向量空间不能表示成有限个真子空间的并。

证：显然，向量空间 V 不能表示成两个真子空间 V_1 和 V_2 的并；这是因为若 $x_1\in V_1\setminus V_2$，而 $x_2\in V_2\setminus V_1$ 则 x_1+x_2 既不在 V_1 中，也不在 V_2 中。现设 $V=\bigcup_{i=1}^{m}V_i$，V_i 是真子空间。我们指出，它们当中必有一个被包在其余子空间的并中。

事实上，设 x_1 仅在 V_1 中而 x_2 仅在 V_2 中，则任取非0元素 $\alpha\in K$，$x_1+\alpha x_2$ 不在 $V_1\cup V_2$ 中，所以 $x_1+\alpha x_2\in V_i$，$i>2$。因为 α 可取无穷多值，不妨取域 K 中的两个不同元素 α 和 β，使 $x_1+\alpha x_2\in V_i$ 且 $x_1+\beta x_2\in V_i$（对同一个 i）。这时 $x_2\in V_i$，与所设矛盾。

这样，我们可以去掉一个子空间，而将 V 表示成 $m-1$ 个子空间的并。利用归纳法，最后归结为两个子空间的情况，而这是不可能的。

§6 交叉积

Galois 理论提供了研究中心单代数的新途径。在本节中，我们将给出一个构造方法，它使得我们可以用正规扩张的语言来刻划 Brauer 群，并对任意一个中心可除代数 D 建立某个形如 $M_n(D)$ 的代数。

首先建立下述重要结果。

预理6.1(Noether) 设 D 是域 K 上的中心可除代数。存在极大子域 $L\subset D$，在域 K 上是分离的。

证：若 K 的特征为 0，则 D 的任意子域都是分离的。因此可以认为，域 K 的特征 $p>0$。今证这时一定可以在 D 中找到域 K 上的分离元素，不属于 K。

任取元素 $a\in D\setminus K$。设 $f(x)=m_a(x)$。若元素 a 不是分离的，则它是不可约多项式 $f(x)$ 的重根（在 $K[a]$ 中），故 $f'(x)=0$，这时 $f(x)=g(x^p)$，对某个 $g(x)\in K[x]$。元素 a^p 是多项式 $g(x)$ 的根。如果它也不是分离的，则又有 $g(x)=h(x^p)$，$h(x)\in K[x]$。继续这一过程，我们总可以找到域 K 上的不分离元素 b，而 b^p 已是分离的。

若是 $b^p\in K$，考察映射 δ: $D\to D$，将 $d\in D$ 映到 $db-bd$。因为 $b\notin K$，存在 $d_0\in D$，使 $\delta(b_0)\neq 0$。同时 $\delta^p(d_0)=d_0b^p-b^pd_0=0$，因为 $b^p\in K$。设m是使$\delta^m(d_0)=0$ 的最小自然数，$t=\delta^{m-1}(d_0)$，$w=\delta^{m-2}(d_0)$，$u=b^{-1}t$。这时 $t=\delta(w)=wb-bw$，而 $\delta t=0$，即 $tb=bt$，所以 $ub=bu$。但从$b=tu^{-1}=(wb-bw)u^{-1}=wbu^{-1}-bwu^{-1}=(wu^{-1})b-b(wu^{-1})$，即 $b=cb-bc$，此处 $c=wu^{-1}$。同乘以 b^{-1}，得到$c=$

$1+bcb^{-1}$.

象对 a 一样，对 c 找到方幂 $p^n=q$，使元素 c^q 在 K 上是分离的。从等式 $c=1+bcb^{-1}$ 得到 $c^q=1+bc^qb^{-1}$，若 $c^q\in K$，则 $c^q=1+c^q$，这是不可能的。因此 $c^q\notin K$。

现在不难对维数 $[D:K]$ 进行归纳完成定理的证明。归纳的基础 $[D:K]=1$ 的情形是平凡的。设对于在中心上维数较小的可除代数，预理已经成立。

在 D 中取元素 $a\in D\setminus K$，它在 K 上是分离的。令 $F=K(a)$，$D_1=C_D(F)$，由定理Ⅳ.4.6知，$F=C_D(D_1)$，再注意到 $F\subset D_1$，由之得 $F=C(D_1)$。但 $[D_1:F]<[D:K]$。由归纳假设知在 D_1 中有极大子域 L，L 在 F 上是分离的。这时 $[D_1:F]=[L:F]^2$，而 $[D:K]=[D_1:K][F:K]=[D_1:F][F:K]^2=[L:F]^2[F:K]^2=[L:K]^2$，即 L 是 D 的极大子域（定理Ⅳ.5.1）。因为 F 在 K 上是分离，由推论3.7，L 在 K 上也是分离的。定理证毕。

推论6.2 任意中心单代数有正规分裂域。

利用定理Ⅳ.5.1和推论4.5即可证明。

按照 Brauer 群的语言，推论6.2表明，

$$\mathrm{Br}K=\bigcup_{L}\mathrm{Br}(L/K),$$

此处 L 跑遍域 K 的正规扩张。

现在设 D 是中心可除代数，有正规分裂域 L。根据定理Ⅳ.5.3，对某个 m，L 可以嵌入代数 $A=M_m(D)$，并且 $[A:K]=[L:K]^2$。如果 $\sigma\in G(L/K)$，由 Skolem-Noether 定理（确切地是推论Ⅳ.4.2），σ 可以延拓为代数 A 的内自同构。换言之，可以在 A 中找到可逆元素 a_σ，任取 $x\in L$，

$\sigma(x)=a_\sigma x a_\sigma^{-1}$，或 $a_\sigma x=\sigma(x)a_\sigma$。显然，元素 a_σ 的确定精确到相差一个与任意 $x\in L$ 可交换的因子，因为 $L=C_A(L)$，所以精确到相差一个取自 L 的因子。

如果 τ 是群 $G=G(L/K)$ 的另一个元素，则 $\sigma\tau(x)=a_{\sigma\tau}x a_{\sigma\tau}^{-1}$，同时，

$\sigma\tau(x)=\sigma(a_\tau x a_\tau^{-1})=a_\sigma a_\tau x a_\tau^{-1}a_\sigma^{-1}=(a_\sigma a_\tau)x(a_\sigma a_\tau)^{-1}$，从而 $a_\sigma a_\tau=\gamma_{\sigma\tau}, a_{\sigma\tau}$，对某个 $\gamma_{\sigma,\tau}\in L$。也就是说，我们得到了两个自变量 σ、$\tau\in G$ 的函数 $\gamma_{\sigma,\tau}$，它取值于域 L 的乘法群 L^*，用两种方法计算 $a_\sigma a_\tau a_\rho$，得到

$$(a_\sigma a_\tau)a_\rho=\gamma_{\sigma,\tau}a_{\sigma\tau}a_\rho=\gamma_{\sigma,\tau}\gamma_{\sigma\tau,\rho}a_{\sigma\tau\rho},$$

$$a_\sigma(a_\tau a_\rho)=a_\sigma\gamma_{\tau,\rho}a_{\tau\rho}=\sigma(\gamma_{\tau,\rho})a_\sigma a_{\tau\rho}=\sigma(\gamma_{\tau,\rho})\gamma_{\sigma,\tau\rho}a_{\sigma\tau\rho},$$

所以

$$\gamma_{\sigma,\tau}\gamma_{\sigma\tau,\rho}=\sigma(\gamma_{\tau,\rho})\gamma_{\sigma,\tau\rho} \qquad (1)$$

满足这个等式的函数 γ 称为群 G 的取值于 L^* 的**上循环**（确切地说是二元上循环）。易验上循环的乘积也是上循环，所以可以谈论上循环的群 $Z(G, L^*)$。

反之，设 $\gamma\in Z(G, L^*)$，我们来构造一个代数 $A=A(G, L, \gamma)$，称之为由上循环 γ 规定的群 G 和域 L 的**交叉积**。

代数 $A(G, L, \gamma)$ 的元素是形式线性组合 $\sum_{\sigma\in G}a_\sigma e_\sigma$，此处 a_σ 是域 L 的元素而 e_σ 是某些符号。

A 上的向量空间结构按通常的"依坐标方式"定义，乘法按下述公式定义：

$$e_\sigma x=\sigma(x)e_\sigma,\ x\in L; \qquad e_\sigma e_\tau=\gamma_{\sigma,\tau}e_{\sigma\tau}$$

（L 中的元素按原来方式相乘）。所得乘法的结合律由关于

上循环的等式(1)立得。

定理6.3 $A=A(G, L, \gamma)$ 是域 K 上的中心单代数，而 L 是它的分裂域。

证： 若元素 $\sum_\sigma a_\sigma e_\sigma$ 在 A 的中心内，则特别地，它与 L 的任意元素可交换，

$$a\sum_\sigma a_\sigma e_\sigma = \sum_\sigma (aa_\sigma)e_\sigma = \left(\sum_\sigma a_\sigma e_\sigma\right)a$$

$$= \sum_\sigma a_\sigma e_\sigma a = \sum_\sigma a_\sigma \sigma(a) e_\sigma,$$

即只要 $a_\sigma \neq 0$，就有 $a=\sigma(a)$。对任意 $a\in L$ 成立，从而 $\sigma=1$。也就是 $C_A(L)=L$，这时有 $C(A)\subset L$。若元素 $a\in L$ 在 $C(A)$ 中，则任取 $\sigma\in G$，$ae_\sigma=e_\sigma a=\sigma(a)e_\sigma$ 即 $a\in \mathrm{Inv}G=K$。随之代数 A 是中心的。

设 I 是 A 的理想。在 I 中取非0元素 $x=\sum_\sigma a_\sigma e_\sigma$，使之含有最少个数的非0系数 a_σ。

用 $e_\sigma - 1$ 去乘 x，可以认为 $a_1\neq 0$。任取元素 $a\in L$。则 $ax-xa\in I$。但

$$ax-xa=\sum_\sigma a a_\sigma e_\sigma - \sum_\sigma a_\sigma e_\sigma a$$

$$=\sum_\sigma aa_\sigma e_\sigma - \sum_\sigma a_\sigma \sigma(a)e_\sigma = \sum_\sigma (aa_\sigma - \sigma(a)a_\sigma)e_\sigma,$$

并且 $aa_1 - 1(a)a_1 = 0$，即在 $ax-xa$ 中有较少的非0分量。这就是说，$ax-xa=0$，而 $x\in C_A(L)=L$，这样 x 有逆，从而得到 $I=A$。

还要证明 L 是 A 的分裂域。这一点可以从 $C_A(L)=L$ 和定理Ⅳ.4.6立即得到。

推论6.4 设 D 是中心可除代数，L 是 D 的正规分裂域。则对某个 m 及上循环 $\gamma\in Z(G,\ L^*)$，$M_m(D)\simeq A(G,\ L,\ \gamma)$。

证：上面我们已经在 $M_m(D)$ 中确立了一些元素 e_σ，它们自身间以及与 L 的元素相乘正如 $A=A(G,\ L,\ \gamma)$ 中的同名元素。这就给出了定义 $A\to M_m(D)$ 的代数同态 f 的可能性。因为代数 A 是单的，所以 f 是单射。又因为 $(G:1)=[L:K]$，$[A:K]=[L:K]^2=[M_m(D):K]$（看定理Ⅳ.5.3），所以 f 是同构。定理证毕。

上循环 $\delta\in Z(G,\ L^*)$ 叫作**上边缘**，若有函数 μ_σ，它定义于 G，取值于 L^*，使对任意 $\sigma,\ \tau\in G$，有

$$\delta_{\sigma,\tau}=\mu_\sigma\sigma(\mu_\tau)\mu_{\sigma\tau}^{-1}$$

定理6.5 设 γ 和 η 是 $Z(G,\ L^*)$ 中的两个上循环，代数 $A=A(G,\ L,\ \gamma)$ 与 $B=A(G,\ L,\ \eta)$ 同构，当且仅当存在某个上边缘 δ，使 $\gamma=\delta\eta$。

证：设 f：$A\simeq B$，则 $f(L)$ 是 B 中的子域，同构于 L。利用 Skolem-Noether 定理的推论Ⅳ.4.2，可以认为对任意 $a\in L$，有 $f(a)=a$ 记 $f_\sigma=f(e_\sigma)\in B$。则

$$f(e_\sigma a)=f_\sigma a=f(\sigma(a)e_\sigma)=\sigma(a)f_\sigma,$$

从而 $f_\sigma=\mu_\sigma e_\sigma$ 对某个 $\mu_\sigma\in C_B(L)=L$。但

$$f(e_\sigma e_\tau)=f_\sigma f_\tau=\mu_\sigma e_\sigma\mu_\tau e_\tau=\mu_\sigma\sigma(\mu_\tau)e_\sigma e_\tau=\mu_\sigma\sigma(\mu_\tau)\eta_{\sigma,\tau}e_{\sigma\tau}$$
$$=f(\gamma_{\sigma,\tau}e_{\sigma\tau})=\gamma_{\sigma,\tau}f_{\sigma\tau}=\gamma_{\sigma,\tau}\mu_{\sigma\tau}e_{\sigma\tau},$$

即 $\gamma_{\sigma,\tau}=\mu_\sigma\sigma(\mu_\tau)\mu_{\sigma\tau}^{-1}\eta_{\sigma,\tau}$。

反之，设 $\gamma=\delta\eta$，此处 $\delta_{\sigma,\tau}=\mu_\sigma\sigma(\mu_\tau)\mu_{\sigma\tau}^{-1}$。定义映射 f：

$A \to B$，规定 $f\left(\sum_\sigma a_\sigma e_\sigma\right) = \sum_\sigma a_\sigma \mu_\sigma e_\sigma$。不难看出，$f$ 是代数同态。但从 A 的单性及 A、B 维数相同可以断定 f 是同构。定理证毕。

上边缘组成 $Z(G, L^*)$ 中的子群 $B(G, L^*)$，定理6.5与推论6.4表明，群 $\mathrm{Br}(L/K)$ 的元素与商群

$$H(G,L^*) = Z(G,L^*)/B(G,L^*)$$

的元素一一对应。

定理6.6 $\mathrm{Br}(L/K) \simeq H(G,L^*)$

证：基于下述预理。

预理6.7 $A(G,L,\gamma) \otimes A(G,L,\eta) \simeq M_n(A(G, L, \gamma\eta))$，此处 $n = [L:K]$。

证：记 $A = A(G,L,\gamma)$；$B = A(G,L,\eta)$。因为域 L 既在 A 中也在 B 中，所以 $A \otimes B$ 有子代数 $L \otimes L$。如同定理5.2的证明中所指出的，在 $L \otimes L$ 中有唯一的非0幂等元 f，使 $(x \otimes 1) f = f(1 \otimes x)$，对一切 $x \in L$ 成立。我们来证，任取 $\sigma \in G, f(e_\sigma \otimes e_\sigma) = (e_\sigma \otimes e_\sigma) f$。事实上，$(e_\sigma \otimes e_\sigma)^{-1} f(e_\sigma \otimes e_\sigma)$ 是 $L \otimes L$ 中的幂等元，并且

$$\begin{aligned}(x \otimes 1)(e_\sigma \otimes e_\sigma)^{-1} f(e_\sigma \otimes e_\sigma) &= (e_\sigma \otimes e_\sigma)^{-1}(\sigma(x) \otimes 1) f(e_\sigma \otimes e_\sigma) \\ &= (e_\sigma \otimes e_\sigma)^{-1} f(1 \otimes \sigma(x))(e_\sigma \otimes e_\sigma) \\ &= (e_\sigma \otimes e_\sigma)^{-1} f(e_\sigma \otimes e_\sigma)(1 \otimes x),\end{aligned}$$

这是因为有 $e_\sigma x = \sigma(x) e_\sigma$，亦即有 $x e_\sigma^{-1} = e_\sigma^{-1} \sigma(x)$。所以 $(e_\sigma \otimes e_\sigma)^{-1} f(e_\sigma \otimes e_\sigma) = f$，这就是要验证的。

现在看代数 $T = f(A \otimes B) f$。令元素 $a \in L$ 对应于元素 $\bar{a} = f(1 \otimes a) = (a \otimes 1) f$，我们便将域 L 嵌入到了代数 T。记 $\bar{e}_\sigma = f(e_\sigma \otimes e_\sigma) = (e_\sigma \otimes e_\sigma) f$。则

$$\overline{a}\,\overline{b}=\overline{ab},\quad \overline{e_\sigma}\,\overline{a}=(e_\sigma\otimes e_\sigma)f(1\otimes a)=(e_\sigma\otimes e_\sigma)(a\otimes 1)f$$

$$=(\sigma(a)\otimes 1)(e_\sigma\otimes e_\sigma)f=\overline{\sigma(a)}\,\overline{e_\sigma},$$

$$\overline{e_\sigma}\,\overline{e_\tau}=f(e_\sigma\otimes e_\sigma)(e_\tau\otimes e_\tau)=f(e_\sigma e_\tau\otimes e_\sigma e_\tau)$$

$$=f(\gamma_{\sigma,\tau}e_{\sigma\tau}\otimes\eta_{\sigma,\tau}e_{\sigma\tau})$$

$$=f(\gamma_{\sigma,\tau}\otimes 1)(1\otimes\eta_{\sigma,\tau})(e_{\sigma\tau}\otimes e_{\sigma\tau})$$

$$=(\gamma_{\sigma,\tau}\eta_{\sigma,\tau}\otimes 1)f(e_{\sigma\tau}\otimes e_{\sigma\tau})=\overline{\gamma_{\sigma,\tau}}\quad\overline{\eta_{\sigma,\tau}}\quad\overline{e_{\sigma\tau}}$$

所以，映射 $\sum_\sigma a_\sigma e_\sigma\to\sum_\sigma\overline{a_\sigma}\,\overline{e_\sigma}$ 是 $A(G,L,\gamma\eta)\to T$ 的同态。（此同态是单的）。

另一方面，$T\simeq E_{A\otimes B}(f(A\otimes B))$。但 $L\otimes L$ 当中单位元的分解形如 $1=\sum_{\sigma\in G}f_\sigma$，此处 f_σ 是唯一满足 $xf_\sigma=f_\sigma\sigma(x)$ 的幂等元，其中 x 是 L 的任意元素。此外，$(1\otimes e_\tau)f_\sigma(1\otimes e_\tau)^{-1}=f_{\tau\sigma}$（看定理 5.2 的证明）。因此所有的模 $f_\sigma(A\otimes B)$ 彼此同构，特别地，同构于 $f(A\otimes B)$，$f=f_1$。所以 $A\otimes B\simeq M_n(T)$，由之得 $[T:K]=n^2=[A(G,L,\gamma\eta):K]$，即得 $T\simeq A(G,L,\gamma\eta)$。完成了预理的证明。

定理 6.6 的证明如下，映射 $Z(G,L^*)\to\mathrm{Br}(L/K)$ 是同态（预理 6.7），其核为 $B(G,L^*)$（定理 6.5），并且这个映射是满的（推论6.4）。

推理6.8 代数 $A(G,L,\gamma)$ 同构于 $M_n(K)$，当且仅当 $\gamma\in B(G,L^*)$。

习　题

1．设 K 是域，特征 $p>0$．映射 ϕ 将 K 的任意元素 a 映成 a^p。证明 ϕ 是域 K 的自同态，它叫作 Frobenius 自同

态。若 K 是有限的，证明 ϕ 是自同构。若 $K=F(t)$ 是某个域 F 上的有理函数域，计算 $\mathrm{Im}\phi$。

2．证明有限域的自同构群是循环群，而 Frobenius 自同构是它的生成元。

3．设域 K 特征不等于 2．证明域 K 上的任意二次扩张 L，即 $[L:K]=2$，是域 K 上某个多项式 x^2-a 的分裂域，其中 a 在域 K 中不是一个完全平方．通常记 $L=K[\sqrt{a}]$。验证 $K[\sqrt{a}]=K[\sqrt{b}]$，当且仅当 ab^{-1} 在 K 中是一个完全平方。

4．找出有理数域上多项式 x^3-2 的分裂域．计算它在有理域上的 Galois 群。

5．$a)$ 设 K 是 q 元有限域，$f(x)$ 是域 K 上 d 次既约多项式。证明 $f(x)$ 整除 $x^{q^d}-x$。反之，若 $f(x)$ 整除 $x^{q^d}-x$，则 d 整除 n。

$b)$ 将域 K 上既约 d 次首项系数为 1 的多项式的个数记作 $\psi(d)$，证明 $q^n=\sum\limits_{d\mid n}d\psi(d)$。

$c)$ 利用 Möbius 反演公式（参考例如维诺格拉托夫《数论基础》）证明：

$$\psi(n)=\frac{1}{n}\sum_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)q^d,$$

此处 μ 是 Möbius 函数。

6．设 K 是特征 $p>0$ 的域，$F=K[a]$ 是 K 的有限单扩张，$m(x)$ 是元素 a 在 K 上的极小多项式。证明代数 $F\otimes F$ 是局部的，当且仅当 $m(x)=x^{p^k}-\alpha$，其中 k 是整数，$\alpha\in K$。在这种情况下，既约多项式 $m(x)$ 和元素 a 叫作**纯不分**

离的，指数 k 叫作元素 a 的**高**。

7．设 L 是域 K 的有限扩张，证明下述条件等价：

1) $L\otimes L$ 是局部代数；

2) 任取局部交换代数 A，代数 $A\otimes L$ 也是局部的；

3) 域 L 的任意元素是纯不分离的；

4) $L=K[a_1, \cdots, a_t]$，此处所有的元素 a_i 是纯不分离的。

证明在最后一种情况下，域 L 的任意元素的高不超过元素 $a_1, \cdots, a_t$ 的高当中的最大者。

8．设 $K=K_0\subset K_1\subset\cdots\subset K_n=L$ 是一系列有限扩张。证明 L 在 K 上是纯不分离的，当且仅当每一个 K_i 在 K_{i-1} 上是纯不分离的。

9．L 是域 K 的有限扩张，将域 L 的全体分离元素的集合记作 L_s，纯不分离元素的集合记作 L_i。证明：$a)$ L_s 和 L_i 是域 L 的子域，且 $L_s\cap L_i=K$；$b)$ L 在 L_s 上是纯不分离的。

现在设 L_s 是正规的。证明 $c)$ L 在 L_i 上是分离的；$d)$ 若 $\{a_1, \cdots, a_n\}$ 是 L_s 的基，而 $\{b_1, \cdots, b_m\}$ 是 L_i 的基，则 $\{a_k b_j\}$ $(k=1,\cdots,n;\ j=1,\cdots,m)$ 是域 L 的基。

特别地，$[L:K]=[L_s:K][L_i:K]$，L 是包有 L_s 和 L_i 的极小域。子域 L_s 和 L_i 分别叫作扩张 L 的分离部分和纯不分离部分。

10．证明若 L 是域 K 的有限扩张，则下述条件等价：1) L 是单扩张；2) L 仅包含有限个子域。（提示：1)⇒2)：若 $L=K[a]$，F 是 L 的子域，$x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m$ 是 a 在 F 上的极小多项式，则 $F=K[b_1, \cdots, b_m]$。）给出一个非单

扩张的例子。（提示：取 $K=F(x, y)$ 是 F 上两个独立变量的有理多项式组成的域，F 的特征 $p>0$。）

11. 设 F 是域 K 上的有限扩张 L 的子域，$d=[F:K]$ 证明 $F\to L$ 的不同的同态的个数（包括恒等映射）不超过 d。等号成立，当且仅当 F 是分离的，且 L 包有子域 $F'\supset F$，F' 在 K 上正规。

12. 证明包含已知分离扩张的极小正规扩张在同构的意义下是唯一确定的。

13. 证明域 K 的有限扩张 L 是自己的子域 L_1 和 L_2 的合成（即包有 L_1 和 L_2 的最小域），并且 L_2 在 K 上正规。证明，L 在 L_1 上正规，且 $G(L/L)\simeq \mathrm{Inv}(L_1\cap L_2)\subset G(L_2/K)$。

下述一系列习题（从 14 到 22）用于方程的根式解。为简单起见，在这些题中，除习题 22 外假设基础域的特征为 0，习题 22 指出，对于特征为正的域应作一些什么样的改变。

14. 设 L 是多项式 x^n-1 的分裂域。证明 L 中包含 n 次本原单位根，即所给多项式的根 ζ，而其余的根是 ζ 的方幂；进一步，这种根的个数等于 $\phi(n)$，此处 ϕ 是 Euler 函数。由此证明，$G(L/K)$ 是交换群，其阶为 $\phi(n)$ 的因子。

15. 设 K 是包含 n 次本原单位根的域，证明，若 $L=K[a]$，此处 a 是多项式 $x^n-\alpha$ 的根，$\alpha\in K$，则 L 是正规扩张，$G(L/K)$ 是循环群，其阶是 n 的因子。特别地，若 p 是素数，则多项式 $x^p-\alpha$ 或不可约，或在域 K 中分解为线性因子。

16. 反过来，同前设 K 包含 n 次本原单位根 ζ，L 是 K

的正规扩张，其 Galois 群是 n 阶循环群. 证明这时 $L=K[a]$，此处元素 a 的极小多项式形如 $x^n-\alpha$。(提示：a 可以取作 $\omega+\zeta\sigma(\omega)+\zeta^2\sigma^2(\omega)+\cdots+\zeta^{n-1}\sigma^{n-1}(\omega)$，此处 σ 是 $G(L/K)$ 的生成元，而 ω 是 KG-模 L 的生成元。)

17. 称 L 是域 K 的**根式扩张**，若 L 中有子域的链 $K=L_0\subset L_1\subset\cdots\subset L_m=L$，使 $L_i=L_{i-1}[a_i]$，元素 a_i 在域 L_{i-1} 上的极小多项式形如 $x^{n_i}-\alpha_i$。(显然，加细这个链，可以使所有指数 n_i 是素数。)设 K 包含 n_i 次本原单位根。证明，任意根式扩张可以嵌入正规根式扩张中。

18. 扩张 L 叫作**可解的**，若 L 可以嵌入根式扩张。证明，多项式 x^n-1 的分裂域对任意 n 是可解的。(提示：利用习题 14—16 的结果，用归纳法证明。)

19. 证明扩张 L 和包有 L 的极小正规扩张(习题 12)同时可解。(提示：利用习题 17 和 18 的结果。)

20. 证明正规扩张 L 是可解的，当且仅当其 Galois 群是可解的，即在 G 中有子群链 $G=G_0\supset G_1\supset G_2\supset\cdots\supset G_m=\{1\}$，$G_i$ 是 G_{i-1} 的正规子群，商群 G_i/G_{i-1} 是 Abel 群，$i=1, \cdots, m$。(提示：可以认为 G_i/G_{i-1} 是循环群以及 L 是根式扩张，而去利用习题15和 16 的结果；习题 18 使我们可以添入 1 的根，习题13提供了在这种情况下Galois 群的变化。)

21. 设既约多项式 $f(x)\in K[x]$，方程 $f(x)=0$ 称为**根式可解**的，若它的根在某个根式扩张中。证明为此必须且只须多项式 $f(x)$ 的分裂域是根式可解的。

22. 对特征 $p>0$ 的域探讨类似的定理。这时在根式可解的定义中还须允许形如 $x^p-x-\alpha$ 的多项式。相应地，习

题16也需修正一下（在 $n=p$ 时，$\alpha\in K$）。同时注意到纯不分离扩张总是根式扩张。

习题23—27讨论交叉积的重要例子——循环代数。Brauer，Noether 和 Hasse 的众所周知的结果表明，若K是代数数域（即域 Q 上的有限扩张）则这一构造给出了 K 上的全部中心可除代数。在这些习题中，假设 L 是域 K 的正规扩张，其 Galois 群是 n 阶循环群，此群的生成元记作 σ。

23. 设 $\gamma\in Z(G,L^*)$ 是群 G 的取值于 L^* 的上循环，证明 γ 属于上边缘子群 $B(G,L^*)$ 的一个陪集，其中含有上循环 η 形如

$$\eta\sigma^i,\ \sigma^j=\begin{cases}1 & 若\ i+j<n,\\ \alpha & 若\ i+j\geqslant n,\end{cases}$$

此处 $\alpha\in K^*$，对应的代数 $A(G,L,\gamma)$，记作 $A(L,\sigma,\alpha)$（一般地说，它依赖于生成元 σ 的选择）。（提示：在代数 $A(G,L,\gamma)$ 中，元素 e_{σ^i} 可以用 e_σ^i 代替。）

24. 证明 $A(L,\sigma,\alpha)\simeq A(L,\sigma,\beta)$，当且仅当在 L^* 中可以找到元素 λ，使 $\beta=\alpha N(\lambda)$，此处 $N(\lambda)=\lambda\sigma(\lambda)\sigma^2(\lambda)\cdots\sigma^{n-1}(\lambda)$。验证，$N$ 是群 L^* 到群 K^* 的同态，从而得出 $\mathrm{Br}(L/K)\simeq K^*/\mathrm{Im}N$。同态 N 叫作范数。

25. 设 K 是有限域，L 是 K 的有限扩张。证明这时范数 N：$L^*\to K^*$ 是满的。（提示：利用 Wedderburn 关于有限可除代数的定理。）

26. 记 $K=F(t)$是域 K 上不定元 t 的有理函数域。证明多项式 x^2+x+1 在 K 上不可约。（如果 K 改成域 F 上的形式幂级数域 $F((t))$，此题也许会容易些。）

27. 用上述习题的符号，设 $L=K[\alpha]$，α 是多项式

x^2+x+1的根。证明，若 N：$L^*\to K^*$ 是范数，（看习题24），则 $t\notin \mathrm{Im}N$。利用习题24的结果建立域 K 上的四维可除代数 D，D 包有同构于 $K[\sqrt{t}]$的子域，这就给出一个中心可除代数的纯不分离的分裂域的例子。

28. 证明"自同构的独立性定理"：若 L 是域 K 的正规扩张，$G=G(L/K)$，则对任意的函数 f：$G\to L$，可以找到元素 $a\in L$，使 $\sum\limits_{\sigma\in G} f(\sigma)\sigma(a)\neq 0$.（提示：利用定理6.3，将 L 看作代数 $A(G.L.1)$上的模，此处1是单位上循环。

第六章　分离代数

在半单代数中，那些在基本域的任意扩张下仍是半单代数者占有特殊的地位。这些代数叫作分离代数。作为分离代数的例子，一方面有中心单代数，而另一面有分离域。我们将看到，一般情形就是这两类例子在某种意义下的结合。我们还将证明分离代数的下述基本性质：所有双模的半单性；关于分离商代数提升的Wedderburn–Мальцев定理（此结果在第八章中为了推广第三章§6中《泛代数》的构造将要被用到）；主迹型的非退化性（在数论中当讨论分离代数的算术性质时，它起着重要的作用）。

§1　分离代数上的双模

域K上代数A叫作**分离的**，如果对域K的任意扩域L，代数$A_L=A\otimes L$是半单的。

特别，分离代数是半单的，但一般说，反过来是不成立的：如果L是域K的非分离扩张，则L是半单K-代数，但由定理Ⅴ.3.6可知，$L\otimes L$不是半单代数。

我们将给出分离代数的刻划以及分离性的的判别准则，它是定理Ⅴ.3.6的推广。

首先给出下面简单结果。

预理1.1　对于任意K-代数A，存在域K的一个扩域L，

使得L-代数A_L是可裂的，即是

$$A_L/\mathrm{rad}\, A_L \simeq M_{n_1}(L)\times\cdots\times M_{n_s}(L).$$

证：设$\overline{A}=A/\mathrm{rad}\ A\simeq\coprod_i M_{k_i}(D_i)$，其中$D_i$是可除代数，并且说是$[D_1:K]=d>1$。

由于$(\mathrm{rad}\, A)\otimes L$显然是幂零理想，不管什么样的域$L$，它总是含在$\mathrm{rad}\, A_L$中。随之，$A_L/\mathrm{rad}\, A_L$是代数$\overline{A_L}$的商代数. 在$D_1$中取一个元素$a\notin K$。设$p(x)$是它的极小多项式，$F=K[a]$。由于$p(x)$在$F$中有根，故$D_1\otimes F$不是可除代数。从而，若令$B=M_k(D_1)$，则出现在代数$B_F/\mathrm{rad}\, B_F$的分解中的可除代数，它在$F$上的维数小于维数$[D_1:K]$。继续这样《压缩维数》，最后我们就得到一个域$L$，使得$A_L$是可裂代数。

预理1.1所肯定存在的域L叫作代数A的**分裂域**。应该指出，它远不是唯一确定的。甚至极小分裂域，即是其子域已不再是分裂域者，也不是唯一确定的（参看第四章习题6）。

定理1.2 下列条件等价：

1）A是分离代数；

2）$A\otimes A^{-1}$是半单代数；

3）$A\simeq A_1\times A_2\times\cdots\times A_t$，其中$A_i$是具有分离中心的单代数。

证：1）⇒2） 设L是代数A的分裂域。由于A_L是半单代数，故$A_L\simeq M_{n_1}(L)\times\cdots\times M_{n_t}(L)$。此时，$(A_L)\otimes_L(A_L^{-1})$是形如$M_k(L)\otimes M_m(L)\simeq M_{km}(L)$的直积，即仍是半单代数。剩下要说的是，我们有

$$(A_L)\otimes_L(A_L^{-1})=(A\otimes L)\otimes_L(L\otimes A^{-1})\simeq$$
$$A\otimes(L\otimes_L L)\otimes A^{-1}\simeq A\otimes L\otimes A^{-1}\simeq(A\otimes A^{-1})_L.$$

这样，由代数$(A\otimes A^{-1})_L$的半单性就得$A\otimes A^{-1}$的半单性。

2)⇒3)　若$A\otimes A^{-1}$是半单的，则A也是半单的，即$A=A_1\times\cdots\times A_s$，其中$A_i$是单代数，并且$A_i\otimes A_i^{-1}$也是半单的。随之，代数$A_i\otimes A_i^{-1}$的中心也是半单的。但$C(A_i\otimes A_i^{-1})=C(A_i)\otimes C(A_i^{-1})=C(A_i)\otimes C(A_i)$，由之依定理Ⅴ.3.6.便得$C(A_i)$是分离域。

3)⇒1)　设$A=A_1\times\cdots\times A_s$，其中$A_i$是单代数，并且所有中心$C_i=C(A_i)$是分离的。依推论Ⅴ.6.2.存在域$C_i$的一个分离扩张$F$，使得$A_i\otimes_{C_i}F\simeq M_k(F)$。若$L$是域$K$的任意扩张，则$(A_{iL})\otimes_{C_i}F\simeq L\otimes(A_i\otimes_{C_i}F)\simeq M_k(L\otimes F)$。但由推论Ⅴ.3.7得$F$是$K$的分离扩域。这就是说，$L\otimes F$，因而还有$(A_{iL})\otimes_{C_i}F$是半单代数。由之显然得对于任意$L$，$A_{i_L}$以及整个$A_L$的半单性，亦即$A$的分离性。

顺便我们还得到下面的

推论1.3　A是分离代数，当且仅当有域K的一个扩域L，使得$A_L\simeq M_{n_1}(L)\times\cdots\times M_{n_s}(L)$。此外，还可认定$L$是分离域。

推论1.4　若K是完全域(例如，特征零的域或有限域)，则任意半单K-代数都是分离的。

由代数$A\otimes A^{-1}$的半单性，我们还可得到下面结果。

推论1.5　A是分离代数，当且仅当任意A-双模是半单的。

显见后一结果可以转述为：代数A是分离的，当且仅当任意A-双模（或者换个说法，任意$A\otimes A^{-1}$-模）是投射的．下面这个漂亮结果说明，为此只要验证正则双模，亦即看成是$A\otimes A^{-1}$-模的代数A本身的投射性就够了。

定理1.6 代数A是分离的，当且仅当正则A-双模是投射的。

证：设正则A-双模是投射的。取定代数A的一个分裂域。此时$A_L/\mathrm{rad}\,A_L \simeq M_{n_1}(L)\times\cdots\times M_{n_s}(L)$。依定理Ⅱ.3.5，$A$是自由$A\otimes A^{-1}$-模$F$的一个直和项。这时$A_L$便是代数$(A\otimes A^{-1})_L \simeq (A_L)\otimes_L(A_L^{-1})$上自由模$F_L$的直和项，也就是投射$A_L$-双模。由推论Ⅱ.1.8，正则双模的根等于代数的根。商代数$A_L/\mathrm{rad}\,A_L$表成单代数直积的分解式也是A_L-双模$A_L/\mathrm{rad}\,A_L$表成单双模（此商代数的极小理想）直和的一个分解式。

根据投射模和半单模之间的对应关系（定理Ⅱ.3.6），后面这个分解式对应于A_L的表成理想直和的一个分解式，也就是表成代数直和的一个分解式：$A_L = A_1\times\cdots\times A_s$，并且$A_i/\mathrm{rad}\,A_i \simeq M_n(L)$，此处$n=n_i$。

这时依定理Ⅱ.3.4，$A_i \simeq M_n(B)$，其中$B/\mathrm{rad}B\simeq L$(一般说B和足码i有关）。此外，因为A_i是投射A_L-双模，而当$j\neq i$时，分量A_j在其上的作用和0一样，故A_i是投射A_i-模。这里指出，如果$R=\mathrm{rad}B$，则$I=(R\otimes_L B^{-1})\oplus(B\otimes_L R^{-1})$是$B\otimes_L B^{-1}$中的诣零理想，并且$(B\otimes_L B^{-1})/I\simeq L\otimes_L L\simeq L$。随之，依命题Ⅱ.1.13，$I=\mathrm{rad}(B\otimes_L B^{-1})$和$B\otimes_L B^{-1}$是局部代数，而$A_i\otimes A_i^{-1}\simeq M_{n^2}(B\otimes_L B^{-1})$是准素代数。据定理Ⅱ.3.10，它恰有一个主模（显见，就是A_i），并且作为A_i-双模有$A_i\otimes_L A_i^{-1}\simeq n^2A_i$。但$[A_i:L]=n^2b$，此处$b=[B:L]$，以及$[A_i\otimes_L A_i^{-1}:L]=n^4b^2$，故有$b=1$，即$B\simeq L$，$A_i\simeq M_n(L)$，而依推论1.3知，$A$是分离代数。

最后，顺便指出，如果$(A_L)\otimes_L(A_L^{-1})$是半单的，则代

数$A\otimes A^{-1}$也是半单的，由之得下面的

推论1.7 若对域K的某个扩域L，L-代数A_L是分离的，则K-代数A也是分离的。

§2 Wedderburn-Мальцев定理

设A是任意，一般说，非半单代数，R是它的根，$\overline{A}=A/R$，π是代数A到商代数$\overline{A}$上的射影。在代数论的许多问题中，把商代数$\overline{A}$《提升》到A中的一个与之同构的子代数上常是很重要的。今给出准确的定义。

商代数$\overline{A}$的提升是指代数的同态对应$\varepsilon:\overline{A}\to A$，使得$\pi\varepsilon=1$。显然，提升$\varepsilon$必是单同态，而$\mathrm{Im}\varepsilon=A_0$是$A$中一个与$\overline{A}$同构的子代数，且有$A=A_0+R$（向量空间的直和）。

反过来，若A_0是A中的一个与$\overline{A}$同构的子代数，则$A_0\cap R=0$（因为A_0是半单的）。从而$A=A_0+R$(因为$[A:K]=[A_0:K]+[R:K]$)。此时，把射影π限制在子代数A_0上就得同构$\overline{\pi}:A_0\cong\overline{A}$。设$\varepsilon=\overline{\pi}^{-1}$，我们就得到商代数$A$的提升。这样，提升的存在等价于根的可补性。

两个提升，$\varepsilon:\overline{A}\to A$和$\eta:\overline{A}\to A$，叫作**共轭的**，如果存在代数$A$中的一个可逆元$a$，使得$\eta(x)=a\varepsilon(x)a^{-1}$，其中$x$是$\overline{A}$中任意元素。如果尚有$a=1+r$，$r\in R$（这样的元素叫作**幂幺元**），则说$\varepsilon$和$\eta$是**幂幺共轭**。

本节用来证明下面基本结果。

定理2.1 (Wedderburn-Мальцев) 如果商代数$\overline{A}$是分离的，则必存在提升，并且任意两个提升幂幺共轭。

顺便指出，没有关于分离性的假设，定理的两个结论将

不成立：提升是可能不存在的（习题4），而两个不同的提升是可以不共轭的（习题5）。

我们将《一步步地》来证明提升的存在性，逐步扩大使此结果成立的代数类。

1）首先假设A是可裂代数，即$\overline{A}\simeq M_{n_1}(K)\times\cdots\times M_{n_s}(K)$。用$U_i$表示属于代数$\overline{A}$的第$i$分量的单$\overline{A}$-模，$P_i$是相应的主$A$-模（参看推论Ⅲ.2.9)。此时$\overline{A}=n_1U_1\oplus\cdots\oplus n_sU_s$。从而，$A\simeq n_1P_1\oplus\cdots\oplus n_sP_s$（定理Ⅲ.3.6）。

利用同构$A\simeq E_A(A)$以及直和的自同态的矩阵表示（第一章§7），我们可得A同构于形如

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1s} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ x_{s1} & x_{s2} & \cdots & x_{ss} \end{pmatrix}$$

的矩阵组成的代数，其中$x_{ij}\in\mathrm{Hom}_A(n_jP_j,\ n_iP_i)$。特别，$A$含有由《对角线矩阵》组成的子代数，它同构于$E_A(n_1P_1)\times\cdots\times E_A(n_sP_s)\simeq M_{n_1}(A_1)\times\cdots\times M_{n_s}(A_s)$，其中$A_i=E_A(P_i)$，因而$A$也含有同构于$\overline{A}$的子代数，由之以及上面的一段讨论便得提升的存在性。

2）今设$\overline{A}$是任意分离代数，但$R^2=0$。在代数A中选取基$\{a_1,\ \cdots,\ a_n\}$，使得元素$\{\overline{a_1},\ \cdots,\ \overline{a_m}\}$组成商代数$\overline{A}$的基，其中$\overline{a_i}=\pi(a_i)$，而元素$\{a_{m+1},\ \cdots,\ a_n\}$组成$A$的根的基。用$\{\alpha_{ij}^k\}$表示代数$A$的构造常数。换言之，有

$$a_ia_j=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ij}^k a_k$$

这时也就有

$$\overline{a_i}\,\overline{a_j}=\sum_{k=1}^{m}\alpha_{i\,j}^{k}\,\overline{a_k}.$$

欲给提升ε，视之为线性变换，只要给出它对基中元素的作用就够了。条件$\pi\varepsilon=1$意味着$\varepsilon(\overline{a_i})$必定具有形状

$a_i+\sum\limits_{j=m+1}^{n}x_{ij}a_j$，其中$x_{ij}\in K$。最后，$\varepsilon$是同态当且仅当关系式

$\varepsilon(\overline{a_i}\,\overline{a_j})=\varepsilon(\overline{a_i})\,\varepsilon(\overline{a_j})$成立。但是

$$\varepsilon(\overline{a_i}\,\overline{a_j})=\varepsilon\left(\sum_{k=1}^{m}\alpha_{i\,j}^{k}\,\overline{a_k}\right)=\sum_{k=1}^{m}\alpha_{i\,j}^{k}\left(a_k+\sum_{l=m+1}^{n}x_{kl}a_l\right)$$

$$=\sum_{l=1}^{m}\alpha_{i\,j}^{l}\,a_l+\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=m+1}^{n}\alpha_{i\,j}^{k}x_{kl}a_l;$$

$$\varepsilon(\overline{a_i})\varepsilon(\overline{a_j})=\left(a_i+\sum_{k=m+1}^{n}x_{ik}a_k\right)\left(a_j+\sum_{k=m+1}^{n}x_{jk}a_k\right)$$

$$=\sum_{l=1}^{n}\alpha_{i\,j}^{l}\,a_l+\sum_{k,\,l=m+1}^{n}x_{jk}\alpha_{i\,k}^{l}\,a_l+\sum_{k,\,l=m+1}^{n}x_{ik}\alpha_{k\,j}^{l}\,a_l.$$

这里，我们用到了根中元素的乘积总是0，而任意元素和根中元素之积仍在根中。比较基元a_l的系数，我们得到关于x_{kl}的线性方程组

$$\sum_{k=1}^{m} a_{i\,j}^{k} x_{kl} = a_{i\,j}^{l} + \sum_{k=m+1}^{n} a_{i\,k}^{l} x_{jk} + \sum_{k=m+1}^{n} a_{k\,j}^{l} x_{ik},$$

$$i,\ j = 1,\ \cdots,\ n;\quad l = m+1,\ \cdots,\ n.$$

这样，在给定情形下提升的存在等价于一个线性方程组的可解性，而这个方程组的系数都是构造常数，它们在基本域扩张时是不变的。但若L是代数A的分裂域，则$\overline{A_L}$是可裂半单代数。此时由 1）知存在提升$\overline{A_L}\to A_L$。随之，我们这个线性方程组（系数在域K中）在域L中有解。但有下面这个简单事实。

预理2.2 若系数在域K中的一个线性方程组在此域的一个扩张中有解，则它在K中也有解。

由Kronecker-Капелл定理即得其证明。

这样，在域L上提升的存在性引出对于原来代数（当$R^2=0$时）提升的存在性。

3）现在，一般情形易由对根的维数作归纳法而得出。

设$R^2\neq 0$而$B=A/R^2$。根据上一段的结果存在有提升$\overline{\varepsilon}:\overline{A}\to B$。用$A'$表示$\mathrm{Im}\,\overline{\varepsilon}$在代数$A$中的完全原象。此时有$A'\supset R^2$以及$A'/R^2\simeq\mathrm{Im}\varepsilon\simeq\overline{A}$是半单代数。由命题Ⅱ.1.13得$R^2=\mathrm{rad}A'$。由于$\dim R^2<\dim R$，故对代数$A'$可用归纳假设，因而存在提升$\varepsilon:\overline{A}\to A'$。但此时$\varepsilon$也将是$\overline{A}$到$A$中的提升。

在证明共轭性之前，我们先给出下面定理，它推广了定理Ⅳ.4.4（和Skolem-Noether定理《相对偶》）。此结果本身也有独立意义。

定理2.3 若f和g是中心单代数B到某个代数A内的两

个同态，则在A中存在一个可逆元a，使得对所有$b\in B$，有$g(b)=af(b)a^{-1}$。

推论2.4 任意代数A中互相同构的中心单子代数B和B'必共轭。更进一步，任一同态$g:B\xrightarrow{\sim}B'$都可延续成代数A的内自同构，即是具有形状

$$g(b)=aba^{-1}$$

其中a是A中可逆元素。

和在Skolem-Noether 定理中一样，为了证明它只需确立B-A-双模$_fA$和$_gA$之间的同构（参看第四章§1中例2）。但作为右A-模它们两个都和正则模重合.因此定理的结论归结为下面预理。

预理2.5 设A是任意代数，B是中心单代数，M和N是两个B-A-模。这时如果M和N作为A-模是同构的，则它们作为B-A-模也是同构的。

证：设L是代数B的分裂域。因为$(A_L)\otimes_L(B_L^{-1})\simeq(A\otimes B^{-1})_L$，据预理V.5.1，我们只需要证明，若$M_L$和$N_L$作为$A_L$-模是同构的，则它们作为$B_L$-$A_L$-模也是同构的。因此可以从一开始就认定$B=M_n(K)$。此时$A\otimes B^{-1}\simeq M_n(A)$而我们需要验证的是，如果两个$M_n(A)$-模$M$和$N$作为$A$-模同构，则它们作为$M_n(A)$-模也同构。

令$M_i=Me_{ii}$。显然M_i是M的A-子模，且$M=\bigoplus_{i=1}^{n}M_i$。

此外，有$M_ie_{ij}\subset M_j$而乘以e_{ij}和e_{ji}的乘法是相互为逆的A-同态.随之，作为A-模$M_i\simeq M_j$且$M\simeq nM_1$.根据Krull-Шмидт定理，由A-模M和N的同构可得到M_1和N_1的同构。设φ是这个同构对应。提醒一下，任意元素$x\in M$可唯一

地写成形式

$$x=x_1+x_2e_{12}+\cdots+x_ne_{1n},$$

其中$x_i\in M_1$。

定义映射Ψ：$M\to N$如下：

$$\Psi(x)=\varphi(x_1)+\varphi(x_2)e_{12}+\cdots+\varphi(x_n)e_{1n}.$$

容易验证，Ψ是$M_n(A)$-模的同态，并且，由于φ是一一对应，故Ψ也是一一对应，而这正是要证的。

现在转来证明Wedderburn-Мальцев定理中的共轭性。设ε和η是$\overline{A}$到A中的两个提升。我们需要找到一个元素$a=1+r$，$r\in R$，使得对所有$x\in\overline{A}$有$a\varepsilon(x)a^{-1}=\eta(x)$，或者$a\varepsilon(x)=\eta(x)a$。又是选取$\overline{A}$和$A$的基并把$r$写成《待定系数》形式：$r=\sum\limits_{i=m+1}^{n}x_ia_i$，这样就把这个等式转化成关于$x_i$的线性方程组。由预理2.2只要能在域$K$的某个扩域$L$中证明此方程组有解，也就是$\varepsilon$和$\eta$的幂幺共轭性就够了。当然，应把$L$取作分裂域，这样就把问题归结为可裂代数的情形。

总之，我们可以认定$\overline{A}=M_{n_1}(K)\times\cdots\times M_{n_s}(K)$。

用$\overline{e}^k_{ij}$表示代数$\overline{A}$的第i分量的矩阵单位，$k=1,\cdots,s$；$i,j=1,\cdots,n_k$，并令$e^k_{ij}=\varepsilon(\overline{e}^k_{ij})$，$f^k_{ij}=\eta(\overline{e}^k_{ij})$。此时

$$1=\sum_{k=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_k}e^k_{ii}=\sum_{k=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_k}f^k_{ii}$$

是代数A的单位元的两个分解，并且$e^k_{ii}A\simeq f^k_{ii}A$。依定理Ⅱ.4.1，在代数$A$中可得一个可逆元$a$，使得对所有$k=1$，

$\cdots$, s; $i=1$, $\cdots$, n_k有$f^k_{ii}=ae^k_{ii}a^{-1}$。

借助射影π转到$\overline{A}$便得$\overline{e^k_{ii}}=\overline{a}\,\overline{e^k_{ii}}\,\overline{a^{-1}}$，其中$\overline{a}=\pi(a)$，由之易得$\overline{a}=\sum_{i,k}\alpha_{ik}\overline{e^k_{ii}}$，且对所有$i$，$k$有$\alpha_{ik}\neq 0$。令$b=\sum_{i,k}\alpha_{ik}e^k_{ii}$。这时$b$是可逆元，和所有$e^k_{ii}$都可交换，由之得$ab^{-1}$是幂幺元，并且

$$f^k_{ii}=(ab^{-1})e^k_{ii}(ab^{-1})^{-1}.$$

因此，下面可认定，对所有i，k，都有$e^k_{ii}=f^k_{ii}$。

令$e^k=\sum_{i=1}^{n_k}e^k_{ii}$。这时$\overline{e^k}=\sum_{i=1}^{n_k}\overline{e^k_{ii}}$是商代数$A$的中心幂等元。注意到$e^k_{ij}=e^k_{ii}e^k_{ij}e^k_{jj}$和$f^k_{ij}=e^k_{ii}f^k_{ij}e^k_{jj}$，也就是$e^k_{ij}$和$f^k_{ij}$属于$A_k=e^kAe^k$，我们看到，当把$\varepsilon$和$\eta$局限在$\overline{A_k}=\overline{e^k}\,\overline{A}\,\overline{e^k}$上时，就得同态$\varepsilon_k:\overline{A_k}\to A_k$；$\eta_k:\overline{A}\to A_k$。

由于$\overline{A_k}$是中心单代数，由定理2.3可得，必存在可逆元$a_k\in A_k$，使得对所有k，有$\eta_k(x)=a_k\varepsilon_k(x)a_k^{-1}$。再使用映射$\pi$，可得对任意$y\in\overline{A_k}$有$y=\overline{a_k}\,y\,\overline{a_k^{-1}}$，其中$\overline{a_k}=\pi(a_k)$，由之推得有$\alpha_k\in K$，使$\overline{a_k}=\alpha_k e_k$。用$\alpha_k^{-1}a_k$代替$a_k$，我们可认定$a_k=r_k+e_k$，其中$r_k\in R$。但此时若令$a=\sum_{k=1}^{s}a_k$，便得$\eta(x)=a\varepsilon(x)a^{-1}$，并且$a=1+r$，而$r\in R$，这正是要证的。

§3 迹 范数 判别式

设T是代数A的一个表示．考察矩阵$T(a)$的特征多项式$\det(xE-T(a))$．由于相似矩阵的特征多项式相等，故把表示T换成与T相似的表示时，这个多项式是不变的，即是它实际上由相应的A-模M所确定．称此多项式为元素a关于模M（或表示T）的**特征多项式**，并记作$X_{M,a}(x)$．

同样地，矩阵$T(a)$的迹和行列式顺序叫作元素a关于模M的**迹**和**范数**．迹和范数顺序记作$\mathrm{Tr}_M(a)$和$N_M(a)$．

由定义直接可得，迹是一个线性变换$A\to K$，即是

$$\mathrm{Tr}_M(a+b)=\mathrm{Tr}_M(a)+\mathrm{Tr}_M(b);\quad \mathrm{Tr}_M(\alpha a)=\alpha\mathrm{Tr}_M(a),\quad \alpha\in K.$$

此外，$\mathrm{Tr}_M(ab)=\mathrm{Tr}_M(ba)$，$N_M(ab)=N_M(a)N_M(b)$，且对任意$\alpha\in K$，有

$$X_{M,\alpha}(x)=(x-\alpha)^d;\quad \mathrm{Tr}_M(\alpha)=d\alpha;\quad N_M(\alpha)=\alpha^d,$$

其中$d=[M:K]$．

下面的简单命题把对特征多项式，迹和范数的计算归结到单模的情形．

命题3.1 设$M=M_0\supset M_1\supset\cdots\supset M_s=0$是模$M$的组成列，$U_i=M_i/M_{i-1}$是它的单因子．此时对任意元素$a\in A$有

$$X_{M,a}(x)=\prod_{i=1}^{s}X_{U_i,a}(x);\qquad N_M(a)=\prod_{i=1}^{s}N_{U_i}(a);$$

$\mathrm{Tr}_M(a)=\Sigma\mathrm{Tr}_{U_i}(a)$．

注意到对应模M的表示可化简成形如

$$T(a)=\begin{pmatrix} T_1(a) & & 0 \\ & T_2(a) & \\ & & \ddots \\ * & & T_s(a) \end{pmatrix},$$

其中T_i是相应于模U_i的表示，便立即得出此命题的证明。

推论3.2 若元素a属于$\mathrm{rad}A$，则$X_{M,a}(x)=x^d$，$N_M(a)=\mathrm{Tr}_M(a)=0$，其中$d=[M:K]$。

这是因为，若U是单模，则对所有$u\in \mathrm{U}$，$ua=0$，即是在相应的表示中a对应于零矩阵。

命题3.3 对于域K的任意扩张L有

$X_{M_L,a\otimes 1}(x)=X_{M,a}(x)$，$N_{M_L}(a\otimes 1)=N_M(a)$，$\mathrm{Tr}_{M_L}(a\otimes 1)=\mathrm{Tr}_M(a)$。

这是因为，若$\{m_1, \cdots, m_d\}$是K上M的基，则$\{m_1\otimes 1, \cdots, m_d\otimes 1\}$是$L$上$M_L$的基，且在这些基下元素$a$和$a\otimes 1$对应相同的矩阵，由之即得命题的证明。

下面我们将看到，有时很方便地在考虑基本域K上代数A的表示的同时，还考察在域K的某个扩张L上此代数的表示，这也就是L-代数A_L的表示，即A_L-模。今后我们将把元素$a\in A$和元素$a\otimes 1\in A_L$等同起来，并把$X_{M,a\otimes 1}(x)$，$\mathrm{Tr}_M(a\otimes 1)$，$N_M(a\otimes 1)$简写成$X_{M,a}(x)$，$Tr_M(a)$，$N_M(a)$，其中$M$是一个$A_L$-模。

一般说，$X_{M,a}(x)$的系数，特别$\mathrm{Tr}_M(a)$和$N_M(a)$，是域L中的元素。若是对于任意元素$a\in A$，它们都在K中，就说A_L-模M是**规则的**（此名词仅在本节中用）。

称函数$B_M(a,b)=\mathrm{Tr}_M(ab)$，其中$a,b\in A$，为代数$A$上对应于$A$-模$M$的**迹型**。由迹的性质可知$B_M$是向量空间$A$上的对称双线性型。型$B_M$的判别式，亦即下面这个元素

$$\triangle_M=\begin{vmatrix}\mathrm{Tr}_M(a_1a_1) & \mathrm{Tr}_M(a_1a_2)\cdots\mathrm{Tr}_M(a_1a_n)\\ \mathrm{Tr}_M(a_2a_1) & \mathrm{Tr}_M(a_2a_2)\cdots\mathrm{Tr}_M(a_2a_n)\\ \cdots\ \cdots & \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\\ \mathrm{Tr}_M(a_na_1) & \mathrm{Tr}_M(a_na_2)\cdots\mathrm{Tr}_M(a_na_n)\end{vmatrix}$$

其中$\{a_1, \cdots, a_n\}$是A的一个基，叫作**模M的判别式**。显然，$\triangle_M$的确定最多差域K中一个非零元素的平方。如果型B_M非退化，即$\triangle_M\neq 0$，就称模M是**非退化的**。

与这些定义相联系的有下面这个分离性的判断准则。

定理3.4 代数A是分离，当且仅当对域K的某个扩张L存在一个非退化A_L-模M。并且L可选成分离域，而模M可选成为规则的。

证： 若$a\in \mathrm{rad}A_L$，则由推论3.2，对任意$b\in A_L$，有$B_M(a,b)=\mathrm{Tr}_M(ab)=0$，因而型$B_M$是退化的。因此，若$M$是非退化$A_L$-模，则代数$A_L$是半单的。但由命题3.3知，对域$L$的任意扩张$F$，$A_F$-模$M_F$的判别式等于$\triangle_M$。这说明$M_F$是非退化$A_F$-模以及$A_F$是半单的。因此$A_L$，而依推论1.7，这时还有$A$都是分离的。

反过来，设代数A是分离的，L是它的分裂域。此时$A_L\simeq A_1\times\cdots\times A_s$，其中$A_k=M_{n_k}(L)$。设$U_k$是单$A_k$-模。这时对于任一矩阵$a_k\in A_k$，多项式$X_{U_k,a_k}(x)$就是矩阵$a_k$的特征多项式。令$M=U_1\oplus\cdots\oplus U_s$。这时依命题3.3，对于$A_1\times\cdots\times A_s$中任意元素$b=(a_1,\cdots,a_s)$，多项式$X_{M,b}(x)$为矩阵$a_k$的特征多项式的乘积。特别有$\mathrm{Tr}_M(b)=\sum_{k=1}^{s}\mathrm{tr}\,a_k$，$N_M(b)=$

$\prod_{k=1}^{s}\det a_k$.代数A_L有个基是由矩阵单位e^k_{ij}组成（k是分量的足码，$k=1,\cdots,s$；$i,j=1,\cdots,n_k$），并且显然$\mathrm{Tr}_M(e^k_{ii})=1$，而$\mathrm{Tr}_M(e^k_{ij})=0$，$i\neq j$。由之得

$$\mathrm{Tr}_M(e^k_{ij}e^l_{rt})=\begin{cases}1, & \text{如果}k=l,\ i=t,\ j=r\\ 0, & \text{其他情形。}\end{cases}$$

因此在行列式$\triangle_M$中，每一行和每一列都恰含一个1，其他系数都是0。从而$\triangle_M=\pm1\neq0$，即模M是非退化的。

依推论1.3，域L可选为分离域。今证，模M是规则的，即当$a\in A$时，多项式$X_{M,a}(x)$的系数都在域K中。首先指出，$X_{M,a}(x)$与扩域L的选择无关：对于包含L的域这可由命题3.3得出，而若F是任意扩域，则总能作出一个既含F又含L的域。这样，由推论Ⅴ.4.5，可认定域L是正规的。令$G=G(L/K)$。

规定群G对代数A_L的作用如下：

$$\sigma(a\otimes\lambda)=a\otimes\sigma(\lambda),$$

其中$\sigma\in G$，$a\in A$，$\lambda\in L$。设$\sigma(f(x))$表示σ作用到多项式$f(x)$的所有系数后所得到的多项式。今证，对于任意元素$b\in A_L$，有等式$X_{M,\sigma(b)}(x)=\sigma(X_{M,b}(x))$。若是这等式证明了，则对任意$a\in A$，有

$$\sigma(X_{M,a}(x))=X_{M,\sigma(a)}(x)=X_{M,a}(x),$$

而由定理Ⅴ.4.4知，$X_{M,a}(x)$的所有系数都在域K中，即M是规则模。

首先指出，如果$b=(a_1,\cdots,a_s)\in A_L$，则对数码1，2，…，$s$的任意置换（$t_1,t_2,\cdots,t_s$）所确定的$b'=(a_{t_1},$

$\cdots, a_{t_s}$）有$X_{M,b}(x)=X_{M,b'}(x)$。由于$A_L\simeq\sigma(A_1)\times\cdots\times\sigma(A_s)$，则由定理Ⅱ.5.2知，必有足码的一个置换$(t_1, \cdots, t_s)$使得$\sigma(A_k)=A_{t_k}$。特别，此时有$n_k=n_{t_k}$。用$\sigma_k$表示把$\sigma$局限在$A_k$上时所得的映射，并考虑同构$\overline{\sigma}_k: A_k\to A_{t_k}$，它把矩阵$(\lambda_{ij})$映到矩阵$(\sigma(\lambda_{ij}))$。乘积$\overline{\sigma}_k^{-1}\sigma_k$是代数$A_k$的一个自同构，并使中心$L$中的元素不动。依 Skolem-Noether 定理（更准确说，依推论Ⅳ.4.3)它是个内自同构，即有$u_k\in A_k$，使得$\overline{\sigma}_k^{-1}\sigma_k(a)=u_k a u_k^{-1}$，令$v_k=\overline{\sigma}_k(u_k)$，由之便有$\sigma_k(a)=v_k\overline{\sigma}_k(a)v_k^{-1}$。这样，若不计分量的顺序，$\sigma$具有形式

$$(a_1,\cdots,a_s)\to(v_1\overline{\sigma}_1(a_1)v_1^{-1},\cdots, v_s\overline{\sigma}_s(a_s)v_s^{-1}).$$

但是对矩阵a_k的特征多项式的所有系数作用以σ，显然可得矩阵$\overline{\sigma}_k(a_k)$的特征多项式，因而也就得到$v_k\overline{\sigma}_k(a_k)v_k^{-1}$的特征多项式，由之便得要证的等式$X_{M,\sigma(b)}(x)=\sigma(X_{M,b}(x))$。定理全部证完。

附带指出，在定理3.5中，利用基本域的扩张是本质的：在习题 9 中将给出分离代数A的一个例子，所有A-模都是退化的。如果域K的特征等于0或者代数A是交换的，则非退化的A-模是永远存在的（参看习题 6 和下面的例 1）。

多项式$X_{M,a}(x)$，其中M是上面构造的模，叫作元素$a\in A$的**主多项式**，并记作$P_a(x)$。迹$\mathrm{Tr}_M(a)$和范数$N_M(a)$依次称作元素a的**主迹**和**主范数**，并记作$\mathrm{Tr}(a)$和$N(a)$。如果需要指明是关于那个代数而论的，就写成$P_{A/K,a}(x)$，$\mathrm{Tr}_{A/K}(a)$，$N_{A/K}(a)$。双线性型$B(a,b)=Tr(ab)$叫作**主迹型**，而它的判别式$\triangle(A/K)$叫作分离代数A的**判别式**（提醒一下，它是在不计K中非零元素平方的因子下唯一确定的）。

在定理2.4的证明过程中我们还确立了下面事实。

定理3.5 主多项式的所有系数，作为特例，包括主迹和主范数，都在域K中。分离代数的主迹型永远是非退化的，即$\triangle(A/K)\neq 0$。

此外，由于模M是忠实的，而任意矩阵都是其特征多项式的根，还有下面的命题。

命题3.6 分离代数的任意元素是其主多项式的根。

我们还要指出，由模M的构造以及$(A\otimes F)\otimes_F L\simeq A\otimes L$，其中$L\supset F$，还可直接得下面结果。

命题3.7 对于任意元素$a\in A$以及域K的任意扩张F，有

$$P_{AF/F,a}(x)=P_{A/K,a}(x),\quad \mathrm{Tr}_{AF/F,}(a)=\mathrm{Tr}_{A/K}(a),$$

$$N_{AF/F}(a)=N_{A/K}(a).$$

下面给出一些计算主多项式的例子。

例1 设F是域K的一个分离扩张。此时，对任意分裂域L，$F\otimes L\simeq L^n$，其中$n=[F:K]$，而主多项式与正则模的特征多项式一致。显然，同样事实对任意交换分离代数A也成立。

例2 今设A是维数为d^2的中心单代数，L是它的一个极大子域。此时$A\otimes L\simeq M_d(L)$，而$P_a(x)$是对应于元素$a\otimes 1$的矩阵的特征多项式。如果$X_a(x)$表示正则模的特征多项式，则由于正则A_L-模是d个单模的直和，故$X_a(x)=(P_a(x))^d$。特别，$N_A(a)=(N(a))^d\mathrm{Tr}_A(a)=d\mathrm{Tr}(a)$。

习 题

1.证明，对于代数上的任意模M和N和基本域的任意

扩张L，有$\mathrm{Hom}_{A_L}(M_L, N_L) \simeq \mathrm{Hom}_A(M, N) \otimes L$。（提示：可利用齐次线性方程组解的结构定理。）

2．称A-模M是**分离的**，如果对任意L，A_L-模M_L是半单的。证明，M是分离的，当且仅当它是半单的，且代数$E_A(M)$是分离的。

3．找出充要条件，使得

a)对任意L，A_L是单的；

b)对任意L，A_L-模M_L是单的(这样的模叫作**绝对单模**，而相应的表示叫作**绝对既约的**)。

4．设F是特征为2的域，$K = F(t)$是F上有理函数域，$A = K[x]/(x^4 - t^2)$。找出$R = \mathrm{rad} A$和A/R。试证，A中没有同构于A/R的子代数。对任意特征$p>0$的域构造类似的例子。

5．设F和K如上一习题中，$L = K[x]/(x^2 - t)$，A是以$\{1, r\}$为基的L-代数，其中$r^2 = 0$。把A看成K-代数，试证$A/\mathrm{rad} A \simeq L$，并在$A$中找出两个同构于$L$的子代数（由于$A$是交换的，这些子代数在$A$中不共轭）。对任意特征$p>0$构造类似的例子。

6．证明，特征为0的域上代数A是半单的，当且仅当正则A-模是非退化的。

7．利用习题6的结果来证明，必存在整系数，n^3个变量x_{ij}^k，$i, j, k = 1, \cdots, n$，的多项式$F(x_{ij}^k)$，使得具有构造常数γ_{ij}^k的，特征0的域上代数A是半单代数，当且仅当$F(\gamma_{ij}^k) \neq 0$。

8．设K是特征p的域，$A = M_p(K)$。试验证，正则A-模是退化的。把此结果移置到任意维数为p^2的中心单K-代数上。

9. 试证，若D是特征p的域上维数为p^2的中心可除代数，则任意D-模都是退化的（这样可除代数的例子，可参看第5章的习题27）。这样，在定理3.4中的确要考察A_L-模，而不只是A-模。

10. 设A是域K上具有基$\{a_1, \cdots, a_n\}$和构造常数γ_{ij}^k的代数。考察n元有理函数域$F = K(t_1, \cdots, t_n)$上的代数$\widetilde{A}$，它具有同样的基和同样的构造常数。[11] 令$\widetilde{a} = \sum_{i=1}^{n} t_i a_i$，$P(x, t_1, \cdots, t_n) = m_{\widetilde{a}}(x)$是元素$\widetilde{a}$的最小多项式（显然，这是$(n+1)$个变量$x, t_1, \cdots, t_n$的多项式）。

如果$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$是代数$A$的任意元素，则多项式$P_{A,a}(x) = P(x, \alpha_1, \cdots, \alpha_n)$叫作元素$a$的**主多项式**。

a) 证明，$P_{A,a}(x)$不依赖于代数A的基的选择。

b) 对域K的任意扩张L，证明$P_{A_L, a\otimes 1}(x) = P_{A,a}(x)$。

c) 证明，对于分离代数A这个主多项式的定义和§3中给出的一致。

11. 保持上一习题中的定义和符号。如果$P_{A,a}(x) = x^m + \beta_1 x^{m-1} + \cdots + \beta_m$，$\beta_i \in K$，则令$\mathrm{Tr}_{A/K}(a) = -\beta_1$，$N_{A/K}(a) = (-1)^m \beta_m$并顺序称之为**主迹**和**主范数**。

---

[11] 如果定义了无限维代数的张量积，则易见有$\widetilde{A} \simeq A \otimes F$。

a)试证，主迹是空间A上的线性型，并且$\mathrm{Tr}_{A/K}(ab)=\mathrm{Tr}_{A/K}(ba)$，以及$N_{A/K}(ab)=N_{A/K}(a)N_{A/K}(b)$。

b)证明，代数A是分离的，当且仅当双线性型$\mathrm{Tr}_{A/K}(ab)$在空间A上是非退化的。

12.设L是域K的有限扩张。证明，若a是L-代数A的元素，则

$$P_{A/K,a}(x)=N_{L(x)/K(x)}(P_{A/L,a}(x)),\quad \mathrm{Tr}_{A/K}(a)=\mathrm{Tr}_{L/K}(Tr_{A/L}(a)),$$

$$N_{A/K}(a)=N_{L/K}(N_{A/L}(a)).$$

13.证明，若代数A的一个理想 I 有一个由幂零元素组成的基，则 I $\subset \mathrm{rad}A$。（提示：利用幂零矩阵的迹等于0.）

第七章　有限群的表示

在这一章中，我们利用半单代数及其表示的一般理论来证明有限群表示的古典理论中的一些基本结果。

§ 1　Maschke定理

设$GL(V)$为域K上向量空间V的一切可逆线性算子所组成的群。群G到群$GL(V)$内的一个同态对应叫作G在域K上的一个**表示**。换言之，给出一个表示这就是对每一元素$g\in G$都取定一个$T(g)\in GL(V)$，使得$T(gh)=T(g)T(h)$对所有$g,h\in G$都成立。对于群的表示和对代数的表示一样可定义相似、可约、可分解等概念。然而我们将看到研究群G的表示和研究其群代数（看第一章§1例 6）的表示完全是一回事。

回忆一下，群代数KG的基是由群G的元素组成，基元之间的运算和在群G中一样。若$T:KG\to E(V)$是群代数的一个表示，而$g\in G$，则有$T(g)T(g^{-1})=T(gg^{-1})=T(1)=1$。因此，$T(g)$是可逆算子，因而把$T$限制在$G$上，我们便得群$G$的一个表示。反过来，设$T:G\to GL(V)$是群$G$的一个表示。依《线性》方式把它扩张到代数$KG$上，即令

$$T(\sum_{g\in G}\alpha_g g)=\sum_{g\in G}\alpha_g T(g).$$

这就显然得到一个表示$T:KG\to E(V)$，把它限制在G上而

得的表示与最初的表示一致．这样，群的表示和群代数的表示本质上是一回事。

在本章中所出现的群都假定是有限的。下面这个漂亮的结果，也就是著名的Maschke定理，在有限群表示论中起着决定性的作用。

定理1.1 若域K的特征不整除群G的元数，则群代数KG是分离的。

证：根据定理Ⅵ.3.4，只需给出一个非退化KG-模。其实在我们这个情况下，正则KG-模就是非退化的。这是因为，先取群G所有元素集$\{g_1, \cdots, g_n\}$（此处n是G的元数）作为代数KG的基，若$g \neq 1$，则对所有$i = 1, \cdots, n$，$g_i g \neq g_i$，随之，$\mathrm{Tr}(g) = 0$（Tr在这里表示正则表示的迹）。另一方面，$\mathrm{Tr}(1) = [KG:K] = n$。因此，当$g_i \neq g_i^{-1}$时，$\mathrm{Tr}(g_i g_j) = 0$，而当$g_i = g_j^{-1}$时，$\mathrm{Tr}(g_i g_j) = n$。这样，在正则表示的判别式$\triangle$中，在每一行和每一列中都恰有一个非零元。这里提一下，由于域K的特征不整除n，故$n = n1 \neq 0$。因此，$\triangle \neq 0$（精确说，$\triangle = \pm n^n$）因而代数KG是分离的。

推论1.2 若域K的特征不整除群G的元数，则群G在域K上的任一表示都是完全可约的。

我们知道，Maschke定理的逆定理也是成立的。

定理1.3 若域K的特征整除群G的元数，则代数KG不是半单的。

证：考虑代数KG的元素$s = \sum_{x \in G} x$。显然，对任意$g \in G$，有等式$gs = sg = s$。因此，s在代数KG的中心中。另一方面，

$$s^2 = \sum_{x \in G} xs = ns = 0$$（由于群G的的元数n被域K的特征整 除）.

依推论Ⅱ.2.8代数KG不是半单的。

这样，群表示论实际上分成两个本质不同的理论：古典表示论（当群的元数不被域K的特征整除）和模表示论（当群的元数被域K的特征整除）。在本章中（除去某些习题外），我们将仅考察古典表示论。因此，在下面我们将永远假定群G的元数不被域K的特征整除。

§ 2　既约表示的个数和维数

由Maschke定理以及半单代数及其表示的理论，较容易地得到下面这些关于既约表示的个数和维数的重要结果。

定理2.1　若d_1，…，d_s是群G在代数闭域K上所有（彼此不同构的）既约表示的维数，则$d_1{}^2 + \cdots + d_s{}^2 = n$，其中$n = (G:1)$。

证：依Wedderburn-Artin定理（更准确些，由推论Ⅱ.4.4）和定理Ⅱ.6.2，若d_1，…，d_s是代数KG的所有既约表示的维数，则$KG \simeq \prod_{i=1}^{s} M_{d_i}(K)$，由之得$[KG:K] =$

$$\sum_{i=1}^{s} d_i^2.$$

仍设K是代数闭域。此时依推论Ⅱ.4.2，代数KG的中心同构于K^s，其中s是KG的单分量的个数，也就是互不同构

的既约表示的个数。因此，既约表示的个数等于代数KG的中心的维数。但元素$a=\sum_{x\in G}\alpha_x x$属于$KG$的中心当且仅当对所有$g\in G$，有$ga=ag$，也就是$gag^{-1}=a$。由于$gag^{-1}=\sum_{x\in G}\alpha_x(gxg^{-1})$，这说明元素$a$的表达式中$x$的系数和$gxg^{-1}$的系数相等。

重提一下，x和gxg^{-1}叫作在群G中**共轭元素**。整个群G划分成互不相交的共轭元素类C_1，C_2，…，C_s。由上面的讨论得，群代数KG的中心有一个由元素$c_i=\sum_{x\in C_i}x$，$i=1$，…，s，组成的基。由之得下面的

定理2.2 有限群G在代数闭域K上的不同构既约表示的个数等于群G中共轭元素类的个数。

推论2.3 群G是交换的，当且仅当它在代数闭域上的既约表示都是一维的。

为了证明这个推论，只需指出下面一点：一个群是交换的，当且仅当其每一共轭元素类都只含一个元素，这样由定理2.2有，此群的既约表示的个数等于群的元数。考虑到这些表示的维数和G的元数之间的关系（定理2.1），便知这个事实成立当且仅当所有这些表示都是一维的。

推论2.4 若G和H是有相同元数的交换群，而域K是代数闭的，则群代数KG和KH是同构的。

§3 特征标

设T是群G在域K上的一个表示，M是相应的KG-模。

这时，对于任意元$a\in KG$，可定义它关于模 M 的迹（第6章§3），也就是矩阵$T(a)$（在任意基下）的迹。特别，对于任意元$a\in G$，可确定一个域K中的元素$\chi(x)=\mathrm{Tr}_M(x)$。函数$\chi:G\to K$叫作表示T的**特征标**。如果T是既约的，则χ叫作**既约特征标**。正则表示的特征标叫作**正则特征标**，并记作χ_{reg}。

命题3.1 $\chi_{reg}(x)=\begin{cases} n & 当x=1, \\ 0 & 当x\neq 1. \end{cases}$

证明是显然的。

命题3.2 对任意特征标χ，有$\chi(gxg^{-1})=\chi(x)$。换言之，特征标在共轭元素类上取定值。

对于任意表示T，有$T(gxg^{-1})=T(g)T(x)T(g)^{-1}$，即矩阵$T(gxg^{-1})$和$T(x)$是相似的，因而有相同的迹，由之即得此命题的证明。

还该指出，由推论Ⅱ.6.3，立刻可得下面的

定理3.3 设K是特征为零的域。这时，表示由其特征标唯一确定，即由特征标的相等可得表示的等价。

下面设域K是代数闭的，χ_1，…，χ_s是群G在域K上的所有既约特征标。令$\chi_{ij}=\chi_i(g_j)$，其中$g_j\in C_j$（C_1，…，C_s是群G的共轭元素类）。方阵$X=(\chi_{ij})$叫作群G在域K上的**特征标表**。顺便指出，如果M_i是第i个既约表示的模，则$KG\simeq\bigoplus_{i=1}^{s}d_iM_i$，其中$d_i=[M_i:K]$，由之得$\chi_{reg}=\sum_{i=1}^{s}d_i\chi_i$

前面已经说过，元素$c_i=\sum_{x\in C_i}x$，$i=1$，…，s，组成G

的群代数之中心C的一个基。另一方面，$C\simeq K^s$，因此若$1=e_1+\cdots+e_s$是代数C的单位元的分解式，则元素$\{e_1,\ \cdots,e_s\}$也组成C的一个基。因而在域K中可找到元素α_{ij}和β_{ij}，使得

$$c_i=\sum_{j=1}^{s}\alpha_{ij}e_j,\quad e_i=\sum_{j=1}^{s}\beta_{ij}c_j,$$

并且矩阵$A=(\alpha_{ij})$和$B=(\beta_{ij})$是互逆的。我们还知道，系数α_{ij}和β_{ij}和特征标表是紧密相关的，即有

命题3.4 用d_i表示具特征标χ_i的既约表示的维数，h_i表示类C_i中元素个数。这时，有

$$\alpha_{ij}=\frac{h_i}{d_j}\chi_{ji};\qquad \beta_{ij}=\frac{d_i}{n}\chi_i(g_j^{-1}),$$

其中$g_j\in C_j$。

证：我们知道，在第j个表示中元素e_j的作用如恒等元，而元素$e_k(k\neq j)$如零元。故当$k\neq j$有$\chi_j(e_k)=0$，而$\chi_j(e_j)=d_j$。由之有

$$\chi_j(c_i)=\chi_j\left(\sum_{k=1}^{s}\alpha_{ik}e_k\right)=\sum_{k=1}^{s}\alpha_{ik}\chi_j(e_k)=d_j\alpha_{ij}.$$

另一方面，显然有$\chi_j(c_i)=h_i\chi_{ji}$，由之便得关于α_{ij}的表达式。

我们利用$\chi_{reg}=\sum_{i=1}^{s}d_i\chi_i$来求$\beta_{ij}$. 我们知道，当$g^{-1}\notin C_k$有$\chi_{reg}(c_kg)=0$，而当$g^{-1}\in C_k$有$\chi_{reg}(C_kg)=n$(这由命题3.1即得)。因此，若$g_j\in C_j$，则有

$$\chi_{reg}(e_i g_j^{-1}) = \chi_{reg}(\sum_{k=1}^{s} \beta_{ik} c_k g_j^{-1}) = n\beta_{ij}.$$

另一方面，

$$\chi_{reg}(e_i g_j^{-1}) = \sum_{k=1}^{s} d_k \chi_k(e_i g_j^{-1}) = d_i \chi_i(g_j^{-1}),$$

这是因为当$k \neq i$时，$\chi_k(e_i g) = 0$，而 $\chi_i(e_i g) = \chi_i(g)$。由之便得关于$\beta_{ij}$的表达式。

注意到矩阵A和B是互逆的，我们便得到下面关于特征标的《正交关系》。

定理3.5

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{s} h_k \chi_i(g_k) \chi_j(g_k^{-1}) = \begin{cases} 0 & 当 i \neq j, \\ 1 & 当 i = j; \end{cases}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{s} \chi_k(g_i) \chi_k(g_k^{-1}) = \begin{cases} 0 & 当 i \neq j, \\ 1/h_i & 当 i = j. \end{cases}$$

推论3.6 群G在特征0的代数闭域上的一个表示T是既约的，当且仅当它的特征标满足等式

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{s} h_k \chi(g_k) \chi(g_k^{-1}) = 1.$$

证： 把表示T分解成既约表示的直和。相应地，特征标χ也表示形状$\chi = \sum_{i=1}^{s} m_i \chi_i$，其中$\chi_1$，…，$\chi_s$是既约特征

标。这时有

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{s} h_k \chi(g_k)\chi(g_k^{-1})$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i,j} m_i m_j \sum_{k=1}^{s} h_k \chi_i(g_k)\chi_j(g_k^{-1}) = \sum_{i=1}^{s} m_i^2,$$

此表达式等于 1 当且仅当有个i，使$\chi=\chi_i$，此时，再由定理 3.3，便知T是既约表示。

当$K=C$是复数域时，可以给予正交关系以另外一种形式。为此，利用下面预理。

预理3.7 设χ是群G在复数域上一个维数d的表示T的特征标，则对任意元素$g\in G$，$\chi(g)$是d个n次单位根的和，且有$\chi(g^{-1})=\overline{\chi(g)}$，其$\overline{z}$和通常一样表示$z$的共轭数。

证： 熟知地对任意$g\in G$，我们有$g^n=e$，由之得$T(g)^n=E$。由于多项式x^n-1没有重根，从而知矩阵$T(g)$相似于对角线矩阵

$$T(g)\sim\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & & & 0\\ & \varepsilon_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \varepsilon\end{pmatrix},$$

其中$\varepsilon_i^n=1$。由之得$\chi(g)=\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_d$，

$$T(g^{-1})\sim\begin{pmatrix}\varepsilon_1^{-1} & & & 0\\ & \varepsilon_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \varepsilon_d^{-1}\end{pmatrix}.$$

这也就是

$$\chi(g^{-1})=\varepsilon_1^{-1}+\cdots+\varepsilon_d^{-1}=\overline{\varepsilon_1}+\cdots+\overline{\varepsilon_d}=\chi\overline{(g)}.$$

特别，$\chi_i(g_j^{-1})=\overline{\chi_{ij}}$，因而定理3.5中的正交关系可改写成下面形式

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{s}h_k\chi_{ik}\overline{\chi_{jk}}=\begin{cases}0 & 当i\neq j,\\ 1 & 当i=j;\end{cases}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{s}\chi_{ki}\overline{\chi_{kj}}=\begin{cases}0 & 当i\neq j,\\ 1/h_i & 当i=j.\end{cases}$$

§4 整性定理

在本节，我们需要整代数数的一些性质。我们重复一下，一个复数z叫作**整代数数**，如果它是整系数方程$x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m=0$的一个根。

命题4.1 若一个有理数是整代数数，则它是整数。

证： 设$z=p/g$，p和g是互素整数，并设z是方程$x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m=0$的根，其中$a_i$是整数。去掉公共分母后，便得$p^m=-a_1qp^{m-1}-\cdots-a_mq^m$，由于$p$，$q$互素，这是不可能的。

下面预理给出判断一个数z是整代数数的方便准则。

预理4.2 数z是整代数数的充要条件为存在一些不全是零的复数y_1，…，y_t，使得$zy_i=\sum\limits_{j=1}^{t}a_{ij}y_j$，其中所有$a_{ij}$都是整数。

证：若z是整系数方程$x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m=0$的根，则显然只要取$y_1=1$，$y_2=z$，…，$y_m=z^{m-1}$即得。

反过来，设有y_1，…，y_t具有指出的性质。用A表示矩阵(a_{ij})，而用Y表示y_1，…，y_t组成的列向量。此时$(zE-A)Y=0$，由之得$\det(zE-A)=0$。但是$\det(zE-A)=z^t+a_1z^{t-1}+\cdots+a_t$，其中$a_i$是矩阵$A$中元素乘积的整系数线性和，亦即是整数。因而$z$是整代数数。

推论4.3 整代数数的和与积仍是整代数数。换言之，整代数数组成环。

证：设y_1，…，y_t是使$zy_i=\sum_j a_{ij}y_j$（a_{ij}是整数）成立的一些数，而y_1'，…，y_r'是使$z'y_i'=\sum_j a_{ij}'y_j'$（$a_{ij}'$是整数）成立的一些数。此时易见，数集$\{y_iy_j'\}$，$i=1$，…，$t$；$j=1$，…，$r$关于数$z+z'$和$zz'$有相应的性质，这就证明了本命题。

由于单位根当然是整代数数，由定理3.7就得下面推论.

推论4.4 若χ是群G在复数域上的特征标，则对任意$x\in G$，$\chi(x)$是整代数数。

下面我们将利用上一节的符号。特别，令$X=(\chi_{ij})$是群G在复数域上的特征标表。

定理4.5 所有数$a_{ij}=(h_i/d_j)\chi_{ji}$都是整代数数。

证：我们知道对任意i，j，c_ic_j是代数CG的中心中的元素。另一方面，c_ic_j是群G中一些元素的整系数线性组合。由之得$c_ic_j=\sum_k \gamma_{ijk}c_k$，其中所有$\gamma_{ijk}$都是整数。与此同

时，还有

$$c_i c_j = (\sum_p \alpha_{ip} e_p)(\sum_q \alpha_{jq} e_q) = \sum_p \alpha_{ip} \alpha_{jp} e_p,$$

而$c_k = \sum_p \alpha_{kp} e_p$，由之得 $c_i c_j = \sum_{p, k} \gamma_{ijk} \alpha_{kp} e_p$ 以及 $\alpha_{ip} \alpha_{jp} = \sum_k \gamma_{ijk} \alpha_{kp}$。设$z = \alpha_{ip}$，$y_i = \alpha_{jp}$（固定$p$）。这时利用预理4.2，便得$\alpha_{ip}$是整代数数。

推论4.6 既约复表示的维数d_i整除群的元数。

为了证明，把正交关系（定理3.5）改写成

$$\sum_{k=1}^{s} \frac{h_k \chi_{ik}}{d_i} \chi_i(g_k^{-1}) = \frac{n}{d_i}.$$

由于$(h_k \chi_{ik})/d_i = \alpha_{ki}$和$\chi_i(g_k^{-1})$都是整代数数，故$n/d_i$是整代数数。又由于它是有理数，故它应是整数，而这正是要证的。

§5 表示的张量积

为了获得群的表示，除去通常的模论构造外，还可定义一个构造方法——张量（或Kronecker）积。

设M和N是群代数KG上两个模。这时可把它们（作为向量空间）的张量积加工成KG-模，为此，只要对任意元素$g \in G$，令$(m \otimes n) g = mg \otimes ng$。这样构成的模叫作**KG-模M和N的张量积**，而群G的相应表示叫作相应于模M和N的**表**

示的张量积。

现在来计算表示的张量积的特征标。设对应于模M的表示T在某个基$\{u_1, \cdots, u_m\}$下具有形状

$$T(g)=\begin{pmatrix}\varphi_{11}(g), \cdots, \varphi_{1m}(g)\\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots\\ \varphi_{m1}(g), \cdots, \varphi_{mm}(g)\end{pmatrix},$$

而对应于模N的表示S在某个基$\{v_1, \cdots, v_n\}$下具有形状

$$S(g)=\begin{pmatrix}\psi_{11}(g), \cdots, \psi_{1n}(g)\\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots\\ \psi_{n1}(g), \cdots, \psi_{nn}(g)\end{pmatrix}.$$

张量积$u_i\otimes v_j$，$i=1, \cdots, m$；$j=1, \cdots, n$，组成$M\otimes N$的一个基，并且

$$(u_i\otimes v_j)g=u_ig\otimes v_jg=\Big(\sum_k \varphi_{ik}(g)u_k\Big)\otimes\Big(\sum_l \psi_{jl}(g)v_l\Big)$$

$$=\sum_{k,l}\psi_{ik}(g)\varphi_{jl}(g)(u_k\otimes v_l).$$

这样，g在此表示中所对应的矩阵[12] $(T\otimes S)(g)$之系数就是矩阵$T(g)$和$S(g)$的系数之一切可能的乘积。特别，我们有

$$\mathrm{Tr}(T\otimes S)(g)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\varphi_{ii}(g)\psi_{jj}(g)$$

$$=(\mathrm{Tr}T(g))(\mathrm{Tr}S(g)).$$

因此，我们证明了下面的

命题5.1 张量积的特征标等于特征标的乘积。

---

(12) 这个矩阵叫作矩阵$T(g)$和$S(g)$的*Kronecker*积或张量积，记作$T(g)\otimes S(g)$

推论5.2 设χ_1，…，χ_s是群G的既约特征标，则存在一些自然数n_{ijk}，使得对于任意i，j，有$\chi_i\chi_j=\sum_{k=1}^{s} n_{ijk}\chi_k$。

证： 设M_1，…，M_s是所有单模KG-模。此时有自然数n_{ijk}，使$M_i\otimes M_j\simeq\bigoplus_k n_{ijk}M_k$，由之即得上述结论。

下面设$G=G_1\times G_2$。直因子之一（说是G_1）的任一表示T都可看成整个群G的一个表示，为此，只需设$T(g_1,g_2)=T(g_1)$。特别，若T是G_1的一个表示，而S是G_2的一个表示，则可作它们的张量积$T\otimes S$，它是群G的一个表示。此时有下面的

定理5.3 设域K是代数闭的。如果群G_1的表示T和群G_2的表示S都是既约的，则群$G=G_1\times G_2$的表示$T\otimes S$也是既约的，且群G的任意既约表示都可唯一地表成这种形式。

证： 设$M(N)$是KG_1-模(KG_2-模)，它相应于表示$T(S)$。由于K是代数闭的，故$E_{KG_1}(M)=E_{KG_2}(N)=K$，再依定理Ⅱ.6.7，令元素$a\in KG_1$对应于线性变换$m\to ma$，我们便得代数间的满同态$KG_1\to E(M)$。

在模M中取基$\{u_1,\cdots,u_m\}$，而设$x=\sum_{i=1}^{m} u_i\otimes n_i$ ($n_i\in N$)是$M\otimes N$中的一个非零元素。为了确定起见，认定$n_1\neq 0$。在代数KG_1中取一个元素$a=\sum_j \alpha_j g_j$，$\alpha_j\in K$，$g_j\in G_1$，使得它所对应的线性变换$M\to M$把u_1映到一个任意给定的元素$m\in M$，而把u_2，…，u_m映到0。这时有

$$x\sum_{j}\alpha_j(g_j,1)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\alpha_ju_jg_j\otimes n_i=\sum_{i=1}^{m}u_ia\otimes n_i$$
$$=m\otimes n_1.$$

类似地可以选取一个元素$b\in KG_2$,使得对于某个任意$n\in N$，有$(m\otimes n_1)b=m\otimes n$。因此，$x$生成的子模与$M\otimes N$重合，即$M\otimes N$是单模。

这里提一下，在群$G=G_1\times G_2$中，元素(g_1, g_2)和(g_1', g_2')共轭当且仅当g_1和g_1'在G_1中共轭而g_2和g_2'在G_2中共轭。因此，如果C_1，…，C_s是G_1中共轭元素类，而D_1，…，D_t是G_2中的共轭元素类。则$C_i\times D_j$，$i=1$，…，s；$j=1$，…，t，就是$G_1\times G_2$中的共轭元素类。特别，它们的个数是st，这样根据定理2.2，如果我们能够证明，对于单模来说，由$M\otimes N\simeq M'\otimes N'$可得$M\simeq M'$，$N\simeq N'$，则任意单$KG$-模便都将具有形式$M\otimes N$。

用χ，χ'表示相应于模M和模M'的特征标，而ζ，ζ'是相应于模N和N'的，并且，为了确定起见，设$M\not\simeq M'$。在类C_i中选取代表g_i，而在类D_j中取f_j，并设在群G_i中有元素n_i个，在类C_i中有元素h_i个，在类D_j中有k_j个。这时，群G中有元素n_1n_2个，类$C_i\times D_j$中有元素h_ik_j个，而元素(g_i, f_j)是此类的一个代表。对应于$M\otimes N$的特征标是$\chi\zeta$，而对应于$M'\otimes N'$的特征标是$\chi'\zeta'$。此时有

$$\frac{1}{n_1n_2}\sum_{i,j}h_ik_j\chi\zeta(g_i,f_j)\chi'\zeta'(g_i^{-1}, f_j^{-1})$$
$$=\frac{1}{n_1n_2}\sum_{i,j}h_ik_j\chi(g_i)\zeta(f_j)\chi'(g_i^{-1})\zeta'(f_j^{-1})$$

$$=\frac{1}{n_1}\sum_i h_i\chi(g_i)\chi'(g_i^{-1})\cdot\frac{1}{n_2}\sum_j k_j\zeta(f_j)\zeta'(\zeta_j^{-1})=0,$$

由之依定理3.5（以及特征标$\chi\zeta$和$\chi'\zeta'$的既约性），有$\chi\zeta\neq\chi'\zeta'$，因而$M\otimes N\not\simeq M'\otimes N'$。定理证完。

这样，只要知道群G_1和G_2的所有表示，我们就可作出它们直积的所有表示。

今应用表示的张量积这一工具来证明下面结果，它强化了推论4.6。

定理5.4 设C是群G的中心。G在复数域上的任意既约表示的维数整除指数$(G:C)$。

证：设d是既约表示T的维数，M是相应的模。

若是$g\in C$，则矩阵$T(g)$和表示T的所有矩阵都可换，依Schur预理，它是纯量矩阵：$T(g)=\lambda(g)E$。考察群$G\times\cdots\times G$（共m个）的表示$M\otimes\cdots\otimes M$。如果元素g_i在C中，则在此表示中$(g_1, \cdots, g_m)$的作用和用数$\lambda(g_1)\cdots\lambda(g_m)=\lambda(g_1\cdots g_m)$去乘是一回事。特别，若是$g_1\cdots g_m=1$，则这个元素$(g_1, \cdots, g_n)$的作用就和单位元一样。但在群$G\times\cdots\times G$中，所有满足条件$g_i\in C$且$g_1\cdots g_m=1$的元素$(g_1,\cdots,g_m)$组成正规子群$H$。所以，$M\otimes\cdots\otimes M$实际上可看成商群$(G\times\cdots\times G)/H$的表示。此商群的元素是$n^m/c^{m-1}$（其中$n=(G:1)$，$c=(C:1)$，这时$(H:1)=c^{m-1}$）。依推论4.6此表示的维数（等于$d^m$）整除$n^m/c^{m-1}$，即$n^m/c^{m-1}d^m$是整数。

令$q=n/cd$。这是一个有理数，并且对任意自然数m，cq^m是整数。显然这只有当q是整数时才是可能的。定理证完。

§6 Burnside定理

在本节中我们将指明，如何应用表示论去找正规子群，从而证明某些群类的非单性和可解性。在本节中所谈到的表示都是在复数域上的。

设T是群G的d维既约表示，χ是它的特征标。依预理3.7，对于任意$g\in G$，数$\chi(g)$总是d个n次单位根的和，其中$n=(G:1)$。此外，若是矩阵$T(g)$不是纯量的，则这些根不全相同，而此时有

$$|\chi(g)| = |\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_d| < |\varepsilon_1|+\cdots+|\varepsilon_d| = d.$$

用Q表示有理数域，ε表示n次本原单位根，令$L=Q[\varepsilon]$. 这时L是多项式x^n-1的分解域，由定理V.4.4知，是个域Q的正规扩张。用H表示它的Galois群。我们知道，对于任意元素$\sigma\in H$和任意单位根ε_i, $\sigma(\varepsilon_i)$仍是单位根。特别$\sigma(\chi(g))$仍是d个单位根的和，由之$|\sigma(\chi(g))|\leqslant d$。由这些考虑可得出下面的

定理6.1 设C是群G的一个共轭元素类，而T是群G的一个既约表示，C中元素个数h与T的维数d互素。此时或者所有矩阵$T(g)$ $(g\in C)$都是纯量的，或者对所有$g\in C$, $\chi(g)=0$，其中χ是表示T的特征标。

证：设$g\in C$，依定理4.5，$(h/d)\chi(g)$是整代数数。同时$\chi(g)$也是整代数数。利用d和h的互素可得整数x和y使$xd+yh=1$。此时得

$$z=y\frac{h}{d}\chi(g)+x\chi(g)=\frac{yh+xd}{d}\chi(g) = \frac{\chi(g)}{d}$$

是整代数数。如果$T(g)$不是纯量矩阵，则由上面知$|z|<1$. 另一方面，对于任意$\sigma\in H$，数$\sigma(z)$是整代数数（它满足z所满足的一切方程），并且$|\sigma(z)|<1$。随之，数$q=$

$\prod_{\sigma\in H}\sigma(z)$也是整代数数，并且$|q|<1$。但是对所有$\sigma\in H$，

显然有$\sigma(q)=q$，即$q\in Q$(依定理V.4.4)。这样由命题4.1.知q是整数，由之得$q=0$，因而$z=0$，而这正是我们要证的，

我们知道在非退化矩阵群中，纯量矩阵组成正规子群。因此，$T(g)$为纯量矩阵的元素$g\in G$的全体组成G的一个正规子群$N(T)$。如果T是既约的并且不是一维的，则$N(T)\neq G$。这个想法使得我们可以应用定理6.1去找正规子群。今用此法来证下面两个Burnside定理。

定理6.2 若在群G中有一个共轭元素类$C\neq\{1\}$，其中元素个数$h=p^t$，而p是素数，则G不是单群，即是在其中有非平凡的正规子群。

证：设T_1，…，T_s是G的所有既约表示，d_1，…，d_s是它们的维数，而χ_1，…，χ_s是它们的特征标。将认定T_1是一维表示，并且对所有g都有$T_1(g)=1$。此时对所有g有$\chi_1(g)=1$。若是T_i中还有另一个一维表示，则其核必是G中的非平凡正规子群。所以可认定当$i\neq 1$时，$d_i>1$。

设$g\in C$。若是$T_i(g)$是纯量矩阵，则又是在G中必有非平凡正规子群。不然的话，如果p不整除d_i，则由定理6.1知

$\chi_i(g)=0$。今利用公式$\chi_{reg}=\sum_{i=1}^{s}d_i\chi_i$及命题3.1。我们有

$$\chi_{reg}(g)=0=1+\sum_{i=2}^{s}d_i\chi_i(g)=1+pz,$$

这里z是一个整代数数，由之得$z=1/p$，根据命题4.1，这是不可能的。定理证完。

定理6.3 若$(G:1)=p^a q^b$，其中p，q是素数，则群G是可解的。[13]

证：对群G的元数作归纳法去证。这里我们将利用有限群论中以下熟知的结果：

a）若群G的元数是素数的幂，则群G有非平凡的中心；

b）若群G的元数被p^a整除，其中p是素数，则在G中有元数为p^a的子群（Sylow定理）。

在G中取定一个元数为p^a的子群H，并令$g\neq 1$属于H的中心。令$\overline{H}=\{x\in G|\ xg=gx\}$（元素$g$的正规化子）。显然$\overline{H}\supset H$，因此（$G:\overline{H}$）整除$(G:H)=q^b$。但易见与$g$共轭的元素个数恰是$(G:\overline{H})$，即是$q$的幂。依定理6.2，在$G$中有非平凡正规子群$N$。依归纳假设，群$N$和群$G/N$都是可解的，这时显然得群$G$也是可解，而这正是要证的。

习　题

除去习题18—22外，在所有习题中都假定K是域且其特征不整除群G的元素。

1.设$G=\{g_1,\ \cdots,\ g_n\}$是有限群，M和N是两个KG-模，

（13）我们重提一下，一个群G叫作可解的，如果在其中有一个子群列$G\supset G_1\supset G_2\supset\cdots\cdots\supset G_m=\{1\}$，并且对所有$i=0,1,\cdots,m-1$（$G_0=G$）$G_{i+1}$是$G_i$的正规子群且商群$G_i/G_{i+1}$是交换群。

$f:M\to N$是任意一个线性变换．证明，由式子

$$\overline{f}(m)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(mg_i^{-1})g_i$$

定义的映射$\overline{f}:M\to N$是KG-模间的同态．

2．利用习题1去证明，在上述情况下任意子模$N\subset M$都是M的直和项（提示：把上面指出的构造方法应用到空间M到子空间N的任一射影上，并利用命题Ⅰ.6.2）．这个结果给出Maschke定理的一个新的证明，它不依赖第六章中的结果．

3．证明，若$G=G_1\times G_2$，则有同构 $KG\simeq KG_1\otimes KG_2$．

在习题 4 — 6 中假定域K含$n=(G:1)$次本原单位根（或假定它是多项式x^n-1的分解域），并假定G是交换群．

4．证明，在上述假设下，群代数KG是可裂的，而群G有n个不同的既约表示，它们都是一维的（即是一些同态对应$G\to K^*$，其中K^*是域K的乘群）．

5．用$\widetilde{G}$记群G在域K上的所有既约表示（它们称作G在K上的**特征标**）组成的集合．对于任二特征标f_1和f_2，令$(f_1f_2)(g)=f_1(g)f_2(g)$，其中$g\in G$．

a）验证，f_1f_2也是G在K上的特征标，且关于这样定义的运算$\widetilde{G}$作成元数为n的Abel群．

b）证明，对于任意固定元素$g\in G$，由式子$\widetilde{g}(f)=f(g)$所定义的映射$\widetilde{g}:\widetilde{G}\to K$是群$\widetilde{G}$的特征标．

c）证明，把g映到$\widetilde{g}$的映射$\delta:G\to\widetilde{\widetilde{G}}$是群间的同态对应．

d）证明，$\mathrm{Ker}\,\delta=\{1\}$，即$\delta$是单射，又由于$(G:1)=(\widetilde{\widetilde{G}}:1)$，故$\delta$是群的同构。

6、利用熟知结果：任意有限Abel群G可分解成循环群的直积，去具体计算出其所有的特征标，并证明$\widetilde{G}\simeq G$（与上习题中的同构对应δ不同，这个同构本质地依赖于把G表成循环群直积的具体形式）。

7、称四元数代数（参看第一章§1例4）的子集$\{e, i, j, k, -e, -i, -j, -k\}$为**四元数群**。验证这8个元素关于乘法确组成群。找出此群在实数域上和复数域上的所有既约表示。（提示：在后一种情形可利用第一章习题3的结果。）

8．以a，b为生成元，以$a^n=b^2=1$，$ba=a^{-1}b$为定义关系式的群叫**正多边形群**D_n。

a）证明，D_n是元数为$2n$的有限群。

b）验证，对应

$$a\to\begin{pmatrix}\cos\frac{2\pi k}{n} & -\sin\frac{2\pi k}{n}\\ \sin\frac{2\pi k}{n} & \cos\frac{2\pi k}{n}\end{pmatrix}, \qquad b\to\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

（k是整数）给出群D_n的一个表示，并且对满足不等式$0<k<n/2$的不同k值，表示T_k是既约的且是不等价的。

c）找出群D_n的一维表示并证明这些表示以及表示T_k，$0<k<n/2$（见上面b））给出D_n在复数域上或实数域上的所有既约表示。（提示：利用定理2.1。）

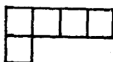
下面习题（9—13）用来刻划对称群S_n（也就是集{1,

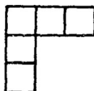
$2, \cdots, n\}$上所有置换作成的群）的表示。先回忆一下关于这个群的结构的某些结果。把i_1变到i_2，i_2到i_3，…，i_k到i_1，而其余不动的置换叫作长为k的**循环**，记作$(i_1, i_2, \cdots, i_k)$。假设所有数$i_1, \cdots, i_k$为不同的。可能有$k=1$。循环$(i_1, \cdots, i_k)$和$(j_1, \cdots, j_l)$叫作**无交的**，如果集$\{i_1, \cdots, i_k\}$和$\{j_1, \cdots, j_l\}$不相交。任一置换σ可分解成无交循环之积$\sigma=(i_{11}, \cdots, i_{1k_1})(i_{21}, \cdots, i_{2k_2})\cdots(i_{t1}, \cdots, i_{tk_t})$，其中$k_1+\cdots+k_t=n$，并且这个分解是唯一的（精确到因子的顺序，因为易见无交的循环是可换的）。长的集$(k_1, \cdots, k_t)$叫作置换σ的**循环型**。

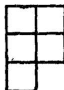
9．证明，在S_n中两个置换共轭当且仅当它们有共同的循环型。因此，在S_n中共轭元素类由循环型，也就是把数n表成自然数之和$n=k_1+\cdots+k_t$的划分唯一确定。

下面我们永远认定：$k_1 \geqslant k_2 \geqslant \cdots \geqslant k_t$。这样的循环型可由所谓Young**图**很方便的给出。我们把n个单元分成t行，第i行有k_i个的分布叫作一个Young图。

例子（$n=5$时）







数$\{1, 2, \cdots, n\}$在一个Young图的单元上的一个任意分布叫作此图的一个**阵位**。说对应于划分$(k_1, \cdots, k_s)$的Young图**高于**对应于划分$(l_1, \cdots, l_t)$的图，如果$k_1>l_1$，

或者$k_1=l_1$而$k_2>l_2$，或者$k_1=l_1$，$k_2=l_2$但$k_3>l_3$，等等（字典排列）。

10. 设D_1和D_2是两个Young图上的阵位，且知其中第一个图高于第二个图。

a) 证明，对于这些图上的任意阵位D_1和D_2必存在两个数$i\neq j$，它们位于D_1的图的同一行内而位于D_2的图的同一列内。

b) 证明，对任一置换σ，可得对换（即长为2的循环）$\tau_1=(i_1 i_2)$和$\tau_2=(j_1 j_2)$，使得$\tau_1\sigma=\sigma\tau_2$，并且数$i_1$，$i_2$在$D_1$的图的同一行而数$j_1$，$j_2$在$D_2$的图的同一列。

11. 设D是一个Young图上任意给定的阵位。令P_D表示把数字在此图的行内变动的置换的全体，而Q_D表示把数字在列内变动的置换全体。

a) 验试，P_D和Q_D是S_n的子群，并且$P_D\cap Q_D=\{1\}$。

b) 证明，如果D_1和D_2是同一Young图上的两个阵位，则或者存在数对i，j，$i\neq j$，它们在D_1的同一行中且在D_2的同一列中，或者在D_1的行内和D_2的列内移动其数字而都变成相同的阵位。

c) 证明，对于任一阵位D和任一置换σ，或者存在对换$\tau_1\in P_D$和对换$\tau_2\in Q_D$，使得$\tau_1\sigma=\sigma\tau_2$，或者$\sigma=\zeta\eta$，其中$\zeta\in P_D$而$\eta\in Q_D$，并且这样的表示是唯一的。

12. 设D是某个图上的阵位。在群代数$A=KS_n$中取元素c_D如下：

$$c_D=\sum_{\substack{\zeta\in P_D\\ \eta\in Q_D}}\operatorname{sgn}(\eta)\zeta\eta,$$

其中sgn(η)是置换η的符号，对于偶置换它是1，对于奇置换它是-1。将称元素c_D为相应于阵位D的Young**对称子**。

证明，若$\sigma\in P_D$，则$\sigma c_D=c_D$，而若$\sigma\in Q_D$，则$c_D\sigma=\text{sgn}(\sigma)c_D$。反之，如果$a\in A$是任意满足这些条件的元素，则有个$\alpha\in K$使得$a=\alpha c_D$。（提示：利用习题11,$c$）中结果.）

13.令$A=KS_n$，$M_D=c_DA$，其中c_D是Young对称子。

a）证明$E_D(M_D)=K$。（提示：利用上一习题的结果）

b）在习题10的假设下，证明$\text{Hom}_A(M_{D_1},\ M_{D_2})=0$。

c）由上去证明，当D历遍所有Young图上的所有阵位，M_D穷尽了所有单A-模（在同构意义下），并且$M_{D_1}\simeq M_{D_2}$当且仅当D_1，D_2是同一图上的阵位。

14.设$A=KG$，M和N是两个任意A-模，χ和ψ是相应表示的特征标。在定理3.5的符号用法下去证明

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{s}h_k\chi(g_k)\psi(g_k^{-1})=\dim\text{Hom}_A(M,\ N).$$

15.由推论2.3和4.6推出，元数p^2（p是素数）的群必是Abel群。

16.设M是群代数KG上的模，M^*是M上的线性型空间，即是$M^*=\text{Hom}_K(M,K)$。验证下面事实：对任意$f\in M^*$，$m\in M$，$g\in G$，规定$(fg)(m)=f(mg^{-1})$，则M^*成为KG-模并且如果T是相应于M的表示，而T^*是相应于M^*的表示，则有$T^*(g)=T(g^{-1})'$（撇表示对矩阵作转置）。特别，如果χ是表示T的特征标，χ^*是表示T^*的特征标，则$\chi^*(g)=\chi(g^{-1})$，而若$K=C$，则$\chi^*(g)=\overline{\chi(g)}$。

17.群G在复数域（或实数域）上的表示T叫作**酉表示**，

如果所有矩阵$T(g)$是酉矩阵。

a）证明，有限群$G=\{g_1, \cdots, g_n\}$的任一复（实）表示必等价于一个酉表示（提示：在相应的模M中随便取一个纯量积（u，v），使得M变成酉（欧氏）空间，令$\langle u, v\rangle=\sum_{i=1}^{n}(ug_i, vg_i)$。此时纯量积$\langle u,v\rangle$仍然变$M$为酉空间，且对所有$g\in G$，有$\langle ug,vg\rangle=\langle u,v\rangle$）

b）由上导出下述事实的另一个证明：G在域R和域C上的表示是完全可约的。

c）用无限循环群为例来说明，对于无限群，a）中结论不成立。

在最后这些习题中，假定域K的特征p整除群G的元数n。

18.设H是群G的子群，且指数$(G:H)$与p互素，N是KG-模M的子模，且作为KH-模是可补的。证明，这时N作为KG-模也是可补的。（提示：在G关于H的倍集中各取一个代表而象习题1,2那样去作。）

19.设G是p-群，即$n=p^k$。令$I=\left\{\sum_{g\in G}\alpha_g g \,\middle|\, \sum_g \alpha_g=0\right\}$。证明$I=\mathrm{rad}KG$，且$KG/I\simeq K$。（提示：利用第六章习题13中的结果。）

20.a）设M是p-群G的既约表示。证明$[M:K]=1$，且对所有$m\in M$，$g\in G$，有$mg=m$。

b）证明，G在K上的任一表示等价于**幺三角表示**，即具有形式

$$T(g)=\begin{pmatrix}1 & & & * \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1\end{pmatrix}.$$

c）由b）推出，任意有限p-群G同构于模p剩余类域上幺三角矩阵群的一个子群。

d）证明，任意有限p-群G是幂零群，即是在其中存在一个正规子群列$G=G_0\supset G_1\supset\cdots\supset G_k=\{1\}$，使得对任意$i=1,\cdots,k$，商群$G_{i+1}/G_i$包含在$G/G_i$的中心内。

21.刻划循环p-群在特征p的域上的不可分解表示.证明它们的个数等于群的元数。

22.设G是元数为p^2的非循环群（即是两个元数为p的循环群的直积）．对于任意偶数d，构造群G的d维不可分解表示。（提示：若a和b是G的循环直因子的生成元，令

$$T(a)=\begin{pmatrix}E & E\\ O & E\end{pmatrix},\quad T(b)=\begin{pmatrix}E & X\\ O & E\end{pmatrix},$$

其中E是单位矩阵，X是任意矩阵。）证明，如果域K是无限的，则存在群G的无限多个d维互不等价的表示。把此结果推广到任意非循环p-群上。

23.设G是三个以a，b，c为生成元的p元循环群的直积.验试下面事实：令

$$T(a)=\begin{pmatrix}E & E\\ O & E\end{pmatrix},\quad T(b)=\begin{pmatrix}E & X\\ O & E\end{pmatrix}, T(c)=\begin{pmatrix}E & Y\\ O & E\end{pmatrix},$$

其中X和Y是任意方阵，我们便得群G的一个表示$T=T_{X,Y}$，并且表示$T_{X,Y}$和T_{X_1,Y_1}是等价的，当且仅当矩阵对X，Y和X_1，Y_1是相似的，即有矩阵C使得$X_1=CXC^{-1}$，$Y_1=$

CYC^{-1}. 顺便指出，С.А.Кругляк对任意非循环p-群（$p>2$）G构造了表示$S_{X,Y}$，它依赖于矩阵对X，Y，并且表示$S_{X,Y}$和S_{X_1,Y_1}等价，当且仅当矩阵对X，Y和X_1，Y_1是相似的。在相似的意义下，对矩阵对进行分类是线性代数最困难的任务之一，直到现在仍没有解决。

第八章　Morita 定理

在第二章§3中，我们曾提过，可除代数D上的模和单代数$M_n(D)$上的模《可同样地构成》.该章§6中结果表明，同型半单代数上的模都具有同样的一些性质：这些模的自同态环彼此同构，等等. 在第三章§5中，这些结果被移置到任意同型代数上的投射模上去（预理Ⅲ.5.5）. 可以证明，此处可省去投射性的条件：同型代数上的所有模有同样的结构. 但是，为了给予这个结论以精确的描述要引入一系列概念，它们现在在数学各个分支，起着重要的作用. 这首先指的是范畴和函子的概念，还有范畴的等价概念，后者是《同样地构成》这个词的数学解释.

在本章中，我们证明Morita定理. 它恰是断言，两个代数同型，当且仅当其上的范畴是等价的. 证明此定理所用的技巧（张量积，正合序列）在许多其他问题中也是很有益的. 特别在§5中，我们将建立双模的张量代数，它是格式的路代数概念的推广，并在刻划非半单代数（不一定是可裂代数）时起与之类似的作用.

§1　范畴和函子

说给定一个**范畴**C，如果定义了：

1）集合ObC，其中元素称作范畴C的**象元**；

2）集合Mor$C$，其中元素称作范畴C的**射元**；

3）每一射元$f\in$Mor$C$对应一象元序对（X,Y）（将称X是射元f的**始点**，Y为f的**终点**，记作$f:X\to Y$，并说f是象元X到象元Y的射元；所有X到Y的射元的集合记作Hom(X,Y)，如果想要标明所在范畴，则记作Hom$_C(X,Y)$；

4）对任三个象元$X,Y,Z\in$ObC和任二射元$f:X\to Y$和$g:Y\to Z$唯一地确定一个射元$gf:X\to Z$，称之为射元f和g的**合成**或**乘积**。

5）射元的乘法是结合的，即对任三个射元f,g,h，只要下面每一乘积有意义，就有$h(gf)=(hg)f$[14]；

6）对任意象元$X\in$ObC存在有射元$1_X\in$Hom(X,X)，使得对任意射元$f:X\to Y$和$g:Z\to X$，有$f1_X=f$，$1_Xg=g$。

容易验证，具有上述性质的射元1_X是唯一的。称之为象元X的**单位射元**或**恒等射元**。

范畴之例1．集范畴Sets。此范畴的象元是一些集合，而射元$f:X\to Y$是集合X到集合Y内的映射。射元的乘积就是依次施行这些映射。范畴的所有公理都成立是显见的。[15]

2.群范畴Gr。此范畴的象元是群，射元$f:X\to Y$是群X到群Y的同态对应，而其乘法就是通常同态对应的乘法。

（14）易见此等式之左侧有意义，则其右侧也有意义，反之也对，——这种情况出现，当且仅当射元f的终点与射元g的始点一致，而g之终点和h的始点一致。

（15）当然，在这样定义下，Ob(Sets)和Mor(Sets)不是集合。但是对于所有实际目的这不是本质的：永远可以限制在某一确定集合的所有子集（及其映射）的范围内.这一注记也适用于其他类似的例子中。

3.可类似地去定义域K上向量空间的范畴（记之为Vect，如果想指明域，则记作 Vect_K）K-代数范畴 Alg（或 Alg_K），代数A上右模范畴 mod-A 或左模范畴A-mod，等等。在所有这些例子中，射元都是集合间的一些映射，而射元的乘法都是映射的依次施行。但下面例子表明也有另外类型的范畴。

4.可把任一半群 P（有单位元）看成是只含一个象元的某个范畴的射元集。这时很自然地把射元的乘法取作半群 P 中的乘法。

5.矩阵范畴Mat．自然数是范畴的象元，而射元集 Hom (m,n) 取为所有系数在域K中的$n\times m$矩阵的全体.射元的乘法就是通常矩阵的乘法。这里验证所有公理是显然的。

6.设M是个偏序集.把它看成是一个范畴的象元集,而当$x\leqslant y$时，$\mathrm{Hom}(x,y)$ 由一个射元组成，否则就取$\mathrm{Hom}(x,y)=\phi$。这里射元的乘法显然可用自然方式去定义。

7.路范畴。设S是某个格式（参看第三章§6）。可把它依下法和一个范畴C_S连系起来。设$\mathrm{Ob}C_S=S$，而 Hom (i,j)，$i,j\in S$，是具始点i终点j的路的集合。和在第三章中一样，路的乘积定义为把一个路衔接到另一路上，而把具始点i终点i的空路（参看第三章）取作1_i。又是容易去验证，这样得到一个范畴，将称之为格式S的路范畴。

8.对偶范畴。由任一范畴C可以如下构造一个新的范畴C°。令$\mathrm{Ob}C^\circ=\mathrm{Ob}C,\mathrm{Mor}C^\circ=\mathrm{Mor}C$，但我们规定射元$f$在范畴$C^\circ$中的始点（终点）是它在范畴$C$中的终点（始点）。我们把在范畴$C$中定义的乘积$fg$取作在范畴$C^\circ$中$g$和$f$的乘积$gf$。$C^\circ$叫作关于范畴$C$的对偶范畴。显然$C^{\circ\circ}=C$。

为了避免混乱，范畴C°的象元和射元通常也附加小圈：X°, f° 等等。这样上面引进的定义可写成下面形式：$\mathrm{Ob}C^\circ = (\mathrm{Ob}C)^\circ$，$\mathrm{Mor}C^\circ = (\mathrm{Mor}C)^\circ$，$\mathrm{Hom}_{C^\circ}(X^\circ, Y^\circ) = \mathrm{Hom}_C(Y, X)^\circ$，而$g^\circ f^\circ = (fg)^\circ$。

在任意范畴中**同构**的概念是有意义的。这就是，射元$f: X \to Y$叫作同构，当且仅当有射元$f^{-1}: Y \to X$，使得$f^{-1}f = 1_X$而$ff^{-1} = 1_Y$。显然，在这些条件下，f^{-1}是唯一确定的，称之为f的**逆元**。当然，f^{-1}也是同构且$(f^{-1})^{-1} = f$。容易验证，同构f和g的乘积（如果它有定义的话）也是同构，并且$(gf)^{-1} = f^{-1}g^{-1}$。

和在讨论群、代数和模时同态概念起着重要作用一样，在范畴的理论中，函子的概念占据中心地位。

由范畴C到范畴D的**函子**F指的是一对映射：$F_{\mathrm{ob}}: \mathrm{Ob}C \to \mathrm{Ob}D$和$F_{\mathrm{mor}}: \mathrm{Mor}C \to \mathrm{Mor}D$，并且它们满足下列条件：

1）若$f: X \to Y$，则$F_{\mathrm{mor}}(f): F_{\mathrm{ob}}(X) \to F_{\mathrm{ob}}(Y)$；

2）$F_{\mathrm{mor}}(1_X) = 1_{F_{ob}(x)}$；

3）如果乘积gf有定义，则$F_{\mathrm{mor}}(gf)$
$= F_{\mathrm{mor}}(g) F_{\mathrm{mor}}(f)$.

通常把$F_{\mathrm{mor}}(f)$和$F_{\mathrm{ob}}(X)$简写成$F(f)$和$F(X)$。

函子的例。**1**.设C是任一范畴。固定随便一个象元$X \in \mathrm{Ob}C$，而依下法作出一个函子$h_X: C \to \mathrm{Sets}$。如果$Y \in \mathrm{Ob}C$，则令$h_X(Y) = \mathrm{Hom}(X, Y)$。如果$f: Y \to Z$，则取$h_X(f)$为集$\mathrm{Hom}(X, Y)$到集$\mathrm{Hom}(X, Z)$的一个映射，它把任意射元$g: X \to Y$映到射元$fg: X \to Z$。条件1）2）显然成立，而由射元乘法的结合性可得条件3）。[16]

(16) 建议不熟悉范畴技巧的读者去实地验证它。

若$C=\text{mod-}A$(或$A\text{-mod}$),其中A是域K上的代数，则所有集合$\text{Hom}(X,Y)$是域K上向量空间，且易见对于任意f，映射$h_X(f)$是同态。因此，在这种情形可把h_X看成是到K上向量空间的范畴Vect内的函子。

2.忽略函子。设$C=\text{Gr}, D=\text{Sets}$。今定义函子$F:C\to D$，令$F(X)=X$而$F(f)=f$（对任意$X\in\text{Ob}C$，$f\in\text{Mor}C$）。换言之，我们《忘掉》$X$上的群结构,而只把$X$简单地看作一个集合，把同态就看作是集合的映射。这个函子称作群范畴到集范畴的**忽略函子**。

如果取C为《具有较丰富结构的集的范畴》，而取D为《具有较贫乏结构的集的范畴》，则我们可以相仿地构造一系列忽略函子的例子来。

例如：a) $C=\text{Alg}_K$，$D=\text{Vect}_K$；b) $C=\text{mod-}A$，$D=\text{Vect}$；c) $C=\text{Alg}_L$，$D=\text{Alg}_K$，其中L是域K的扩域，等等。

3.设A是某一个代数,$B=M_n(A)$.今依下法作函子G：$\text{mod-}A\to\text{mod-}B$。对于任一$A$-模$M$令$G(M)=nM$.用下面自然方式赋予$G(M)$以$B$-模结构：把元素$x\in G(M)$看成分量取自$M$中的$n$维向量，对任意$b\in B$，按普通矩阵乘法规则去规定$xb$。如果$f:M\to N$是$A$-模间的同态，则规定$G(f):G(M)\to G(N)$为《按分量进行》：对$x=(x_1,\cdots,x_n)$规定$G(f)x=(fx_1,\cdots,fx_n)$。易证$G(f)$是$B$-模间的同态，并且上述规定确实定义了一个函子。

4.若L是域K的扩域，则可作函子$F:\text{Alg}_K\to\text{Alg}_L$，取$F(A)$为$L$-代数$A_L=A\otimes L$，而取$F(f)$（其中$f:A\to B$）为$L$-代数的同态$f\otimes 1:A_L\to B_L$。

5.设C是有单位元的半群，把它看成是只有一个象元的范畴（范畴的例4）．今来讨论由范畴C到范畴Vect_K的函子F是怎样的．由于$\mathrm{Ob}C$只含一个元素，故欲定义F_{ob}只需取定一个向量空间V．此时对于半群中的任意元素a有$F(a)\in E(V)$，并且$F(1)=1_V$，而$F(ab)=F(a)F(b)$．这就是说，F_{mor}是半群C在向量空间V上的一个表示．

6.若C°是对偶于范畴C的范畴，则函子$F:C^\circ\to D$常称作由范畴C到范畴D的**反变函子**（此时由C到D的通常函子叫作**正变函子**）．由于在集合$\mathrm{Ob}C^\circ$和$\mathrm{Ob}C$之间，以及$\mathrm{Mor}C^\circ$和$\mathrm{Mor}C$之间存在一一对应，对于反变函子F言可把映射F_{ob}和F_{mor}顺序看成是映射$\mathrm{Ob}C\to\mathrm{Ob}D$和$\mathrm{Mor}C\to\mathrm{Mor}D$．但是，这时函子定义中的公理1）—3）具有下面形式：

1°）若$f:X\to Y$，则$F(f):F(Y)\to F(X)$（F《反转箭头》）；

2°）$F(1_X)=1_{F(X)}$；

3°）$F(gf)=F(f)F(g)$（F《改变箭头的次序》）．

类似于例1可得到反变函子的一个重要例子．固定象元$X\in\mathrm{Ob}C$可以构造一个函子$h^\circ{}_X:C^\circ\to\mathrm{Sets}$，令$h^\circ{}_X(Y^\circ)=\mathrm{Hom}(Y,X)$，而$h^\circ{}_X(f^\circ)$(其中$f:Y\to Z$)是映射$\mathrm{Hom}(Z,X)\to\mathrm{Hom}(Y,X)$，它把射元$g:Z\to X$映到射元$gf:Y\to X$．如果$C=\text{mod-}A$（或$A\text{-mod}$），则$h^\circ{}_X$还成看成是函子$C^\circ\to\mathrm{Vect}$．

§2 正合列

在下面将经常遇到一些情况，那时我们不得不同时考察

相当多的模以及它们之间的以各种关系相联系的一些同态，为了刻划这种状况，《图和正合列的语言》是很方便的。例如，设给定模 M_j 和 $N_j(j=1,2,3)$ 和同态 $f_j:M_j\to N_j(j=1,2,3)$，$g:M_1\to M_2$，$h:M_2\to M_3$，$g':N_1\to N_2$ 以及 $h':N_2\to N_3$。这时，我们就说是给定了下面的模图

$$\begin{array}{ccccc} M_1 & \xrightarrow{g} & M_2 & \xrightarrow{h} & M_3 \\ f_1\downarrow & & f_2\downarrow & & f_3\downarrow \\ N_1 & \xrightarrow{g'} & N_2 & \xrightarrow{h'} & N_3 \end{array} \qquad (1)$$

图(1)叫作**交换的**，如果 $f_2g=g'f_1$ 及 $f_3h=h'f_2$。换言之，如果在图中连接一对模有两条路，则延其中每一路所得同态的乘积是相等的。类似地，对一般情况可定义交换图的概念。可以想象，这个术语将能使我们简明地描述非常复杂的状况。

设给定由模和同态组成的列（有限或无限）

$$\cdots M_{i-1}\xrightarrow{f_{i-1}}M_i\xrightarrow{f_i}M_{i+1}\xrightarrow{f_{i+1}}\cdots \qquad (2)$$

我们说，此列在**项 M_i 处是正合的**，如果 $\mathrm{Ker} f_i=\mathrm{Im} f_{i-1}$。如果列（2）在其所有项处都正合，就说它是**正合的**。

今给出一些例子以说明引进的概念。

1.列 $0\to N\xrightarrow{f}M$（第一个映射显然是零映射）是正合的，当且仅当 $\mathrm{Ker} f=0$，即 f 是单射。类似地，列 $M\xrightarrow{g}N\to 0$ 是正合的，当且仅当 g 是满射。

2.讨论一下列 $0\to N\xrightarrow{f}M\xrightarrow{g}L$ 的正合性意味着什么。在

项N处正合和上面一样说明f是单射．换言之，N可以看成（把它与$\mathrm{Im}f$等同起来）是M的子模．在项M处正合说明$\mathrm{Im}f=\mathrm{Ker}g$，即$N$可和同态$g$的核等同起来。

类似地，列$N\xrightarrow{f}M\xrightarrow{g}L\to 0$的正合性意味着$g$是满同态，利用此满同态可将$L$和商模$M/\mathrm{Im}f$等同起来（这个商模叫作同态$f$的**上核**，记作$\mathrm{Coker}f$）。

3. 最后，正合列

$$0\to N\xrightarrow{f}M\xrightarrow{g}L\to 0$$

说明f是单射而g是满射，并且如果（借助单射f）把N和M的一个子模等同起来，则L和商模M/N同构。

4. 今把投射模定义中的一个（参看定理Ⅱ.3.5）用图和正合列的语言转述一下：模P是投射的，当且仅当任意形如

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & & \downarrow f & & \\ M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

且具有正合列的图都可以扩充成交换图

$$\begin{array}{ccccc} & \overset{\bar{f}}{\swarrow} & P & & \\ & & \downarrow f & & \\ M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

（提醒一下，这里的正合性意味着g的满性，而交换性就指等式$f=g\bar{f}$）。

正合列

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0$$

叫作**可裂的**，如果存在单射$\bar{f}: M \to N$和$\bar{g}: L \to M$，使得$\bar{f}f = 1_N$而$g\bar{g} = 1_L$。依命题 I.6.2，只验证$\bar{f}$(或$\bar{g}$)的存在就够了：在这种情况M等同于直和$N \oplus L$，并且f是自然嵌入$N \to N \oplus L$（将元素$x \in N$映入$(x, 0)$），而g是$N \oplus L$到第二直和项上的射影。

最后，我们给出一个图的预理，在下面将常用到它。

预理2.1（五同态预理）　设在交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} M_1 & \xrightarrow{f_1} & M_2 & \xrightarrow{f_2} & M_3 & \xrightarrow{f_3} & M_4 & \xrightarrow{f_4} & M_5 \\ \downarrow{\varphi_1} & & \downarrow{\varphi_2} & & \downarrow{\varphi_3} & & \downarrow{\varphi_4} & & \downarrow{\varphi_5} \\ N_1 & \xrightarrow{g_1} & N_2 & \xrightarrow{g_2} & N_3 & \xrightarrow{g_3} & N_4 & \xrightarrow{g_4} & N_5 \end{array} \tag{3}$$

中两列都是正合的，而同态φ_i，$i = 1, 2, 4, 5$是同构。此时φ_3必也是同构。

证：设$x \in M_3$是φ_3的核中元素，即$\varphi_3 x = 0$。此时$\varphi_4 f_3 x = g_3 \varphi_3 x = 0$，又因为$\varphi_4$是同构，故$f_3 x = 0$，即$x \in \mathrm{Ker} f_3$。依正合性有$\mathrm{Ker} f_3 = \mathrm{Im} f_2$。这说明可得元素$y \in M_2$，使得$x = f_2 y$。此外，$g_2 \varphi_2 y = \varphi_3 f_2 y = \varphi_3 x = 0$。这样就有$\varphi_2 y \in \mathrm{Ker} g_2 = \mathrm{Im} g_1$，即有$z \in N_1$使$\varphi_2 z = g_1 z$但$\varphi_1$也是同构，故有$u \in M_1$使$z = \varphi_1 u$。并由交换性得$\varphi_2 f_1 u = g_1 \varphi_1 u = g_1 z = \varphi_2 y$，从而$f_1 u = y$。这时有$x = f_2 y = f_2 f_1 u = 0$（仍由正合性）。这样$\mathrm{Ker}\,\varphi_3 = 0$，即$\varphi_3$是单射。

今任取一元素$a \in N_3$。由于φ_4是同构，故有$b \in M_4$使得$\varphi_4 b = g_3 a$。此外有$\varphi_5 f_4 b = g_4 \varphi_4 b = g_4 g_3 a = 0$，这说明$f_4 b = 0$及$b \in \mathrm{Ker} f_4 = \mathrm{Im} f_3$，即$b = f_3 c$，$c \in M_3$。令$\bar{a} = a - \varphi_3 c$。因为$g_3 \varphi_3 c = \varphi_4 f_3 c = \varphi_4 b = g_3 a$，故$g_3 \bar{a} = 0$，即$\bar{a} \in$

$\operatorname{Ker} g_3 = \operatorname{Im} g_2$。设$\bar{a} = g_2 d, d \in N_2$。取 $\bar{c} \in M_2$ 使得 $d = \varphi_2 \bar{c}$。此时 $\varphi_3 f_2 \bar{c} = g_2 \varphi_2 \bar{c} = g_2 d = \bar{a}$，由之 $a = \bar{a} + \varphi_3 c = \varphi_3 (f_2 \bar{c} + c)$ $\in \operatorname{Im} \varphi_3$。这样，$\varphi_3$ 是满射，因而也是同构。

下面是最常遇到应用五同态预理的一些情况。

1）给定一个交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_1} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_2} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_3} & & \\
0 & \longrightarrow & N_1 & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & N_3 & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

它具有正合列，并且 φ_1 和 φ_3 是同构。此时 φ_2 也是同构（在上图中零模间添上恒等映射就得形如（3）的图，因而由预理2.1即得）。

2）给定交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
M_1 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow{\scriptstyle\varphi_1} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_2} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_3} & & \\
N_1 & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & N_3 & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

它的列都是正合的，并且 φ_1 和 φ_2 是同构。此时 φ_3 也是同构：添加一些恒等映射可将上图扩充成

$$\begin{array}{ccccccccc}
M_1 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow{\scriptstyle\varphi_1} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_2} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_3} & & \downarrow & & \downarrow \\
N_1 & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & N_3 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

再利用预理2.1。

3）类似地，如果在具有正合列的交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M_3 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_1} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_2} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_3} \\
0 & \longrightarrow & N_1 & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & N_3
\end{array}$$

中φ_2，φ_3是同构，则φ_1也是同构。

§ 3 张量积

本节中我们将引入模范畴上的一个重要函子——模的张量积。

设A是一个代数，M是右A-模，而N是左A-模。在向量空间$M\otimes N$中，考虑由一切形如$xa\otimes y-x\otimes ay$，$x\in M$，$y\in N$，$a\in A$，的元素生成的子空间T。商空间$(M\otimes N)/T$叫作模M和N在代数A上的**张量积**，记作$M\otimes_A N$。用π表示自然射影$M\otimes N\to M\otimes_A N$。$\pi$和双线性映射$\otimes$：$M\times N\to M\otimes N$（把$(x,y)$映到$x\otimes y$）的合成给出双线性映射$\otimes_A$:$M\times N\to M\otimes_A N$。在此映射下$(x,y)$的象是$x\otimes_A y=\pi(x\otimes y)$。

映射$\otimes_A$具有一个新增加的性质：$xa\otimes_A y=x\otimes_A ay$，将称之为《内$A$-双线性性》。此外，和$\otimes$是泛双线性映射一样，$\otimes_A$是泛内$A$-双线性映射，其意义在下面定理中给出。

定理3.1 设$F:M\times N\to V$是到任意向量空间V的一个内A-双线性映射。此时，必存在唯一的线性映射$f:M\otimes_A N\to V$，使得对任意$x\in M$，$y\in N$有$F(x,y)=f(x\otimes_A y)$.

证：因为F是双线性的，可得唯一的线性映射$\varphi:M\otimes N\to V$，使得对任意$x\in M$，$y\in M$有$F(x,y)=\varphi(x\otimes y)$（定理 Ⅵ.2.1）。但$\varphi(xa\otimes y-x\otimes ay)=\varphi(xa\otimes y)-\varphi(x\otimes ay)=F(xa,y)-F(x,ay)=O$，这是由于$F$的内$A$-双线性性。因而$T\subset\operatorname{Ker}\varphi$，而$\varphi$导出唯一的映射$f:M\otimes_A N\to V$，使得$\varphi=f\pi$，也就是$f(x\otimes_A y)=f\pi(x\otimes y)\varphi(x\otimes y)=F(x,y)$。

显然，泛内A-双线性映射在不计标准同构下是唯一确定的。

这个泛性使得我们较简单地证明张量积的基本性质。

命题3.2 对任意两个 A- 模同态 $f: M\to M'$ 和$g:N\to N'$存在唯一线性映射 $f\otimes_A g: M\otimes_A N\to M'\otimes_A N'$，使得 $(f\otimes_A g)(x\otimes_A y)=fx\otimes_A gy$。如果$f':M'\to M''$和 $g':N'\to N''$是另外两个同态，则 $(f'\otimes_A g')(f\otimes_A g)=f'f\otimes_A g'g$。

证：考察映射 $F:M\times N\to M'\otimes_A N'$，这里我们定义 $F(x,y)=fx\otimes_A gy$。易见F是内 A- 双线性映射。因此，存在唯一映射 $f\otimes_A g: M\otimes_A N\to M'\otimes_A N'$，使得

$$(f\otimes_A g)(x\otimes_A y)=F(x,y)=fx\otimes_A gy.$$

第二个结论是显见的。

上述性质使得我们可以把张量积看成模范畴的一个函子。精确的说就是，取定一个左 A- 模 N 而作函子 $\otimes_A N$: mod-$A\to$ Vect，把任一右 A- 模M映到向量空间 $M\otimes_A N$，而任一同态$f:M\to M'$映到映射$f\otimes_A 1: M\otimes_A N\to M'\otimes_A N$。由命题3.2可知，它满足函子的公理。类似地，可以建立函子 $M\otimes_A$: A-mod$\to$ Vect（取定右A-模M）。

张量积的这种函子性质有时可把 $M\otimes_A N$ 转化成仍是模。例如，设N是A-B-双模（或者，常说成是给定情形M_A和${}_AN_B$）。此时，每一元素$b\in B$诱导一个A-模同态$N\to N$，它把元素 $y\in N$ 带到 yb，随之也就确定向量空间的同态 $M\otimes_A N\to M\otimes_A N$，它把 $x\otimes_A y$ 带到 $x\otimes_A yb$，显然，这样就把$M\otimes_A N$弄成一个B-模。同样地，在情形${}_BM_A$，${}_AN$时(即M是 B-A-双模而N是左 A-模），令 $b(x\otimes_A y)=bx\otimes_A y$，便把 $M\otimes_A N$ 弄成左 B-模。最后在情形 ${}_BM_A$，${}_AN_C$ 张量积 $M\otimes_A N$ 可成为 B-C-双模。这使得我们可以重复施行张量乘积，讨论（在适当的情形下）三个或多个模的积。此时相

乘的顺序是没关系的，这刚好是下面命题要说明的。

命题3.3 在情况 M_A, ${}_AN_B$, ${}_BL$ 下存在唯一的同构

$$(M\otimes_A N)\otimes_B L \simeq M\otimes_A(N\otimes_B L)$$

它把 $(x\otimes_A y)\otimes_B z$ 映到 $x\otimes_A(y\otimes_B z)$。

证：固定元素 $z\in L$，而定义映射 $F_z: M\times N\to M\otimes_A(N\otimes_B L)$ 为 $F_z(x,y)=x\otimes_A(y\otimes_B z)$。显然它是内 A-双线性的，因而存在唯一确定的线性映射 $f_z: M\otimes_A N\to M\otimes_A(N\otimes_B L)$，它把 $x\otimes_A y$ 映得 $x\otimes_A(y\otimes_B z)$。令 z 变动起来，便得内 B-双线性映射 $F:(M\otimes_A N)\times L\to M\otimes_A(N\otimes_B L)$，它将元素对 $(x\otimes_A y, z)$ 变为 $x\otimes_A(y\otimes_B z)$。映射 F 诱导出唯一的线性映射 $f:(M\otimes_A N)\otimes_B L\to M\otimes_A(N\otimes_B L)$，它把 $(x\otimes_A y)\otimes_B z$ 变成 $x\otimes_A(y\otimes_B z)$，即 $f(x\otimes_A y)\otimes_B z=x\otimes_A(y\otimes_B z)$。类似地，可建立线性映射 $g: M\otimes_A(N\otimes_B L)\to(M\otimes_A N)\otimes_B L$，它把 $x\otimes_A(y\otimes_B z)$ 变成 $(x\otimes_A y)\otimes_B z$。因为形如 $x\otimes_A(y\otimes_B z)$（相应地，$(x\otimes_A y)\otimes_B z$）的一切元素显然生成空间 $M\otimes_A(N\otimes_B L)$（相应地，$(M\otimes_A N)\otimes_B L$），故 f 和 g 是互逆的映射，这也正是我们要证的。

易见在情况 ${}_CM_A$, ${}_AN_B$, ${}_BL_D$ 下，上面建立的同构对应也是 C-D-双模的同构对应。

类似地，可证明确立函子 $\otimes$ 和 Hom 之间连系的命题。

先指出，譬如说，在情形 ${}_BM_A$, N_A 下，空间 $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ 可变成右 B-模，为此，只要令 $(fb)(m)=f(bm)$。类似地，在情形 M_A, ${}_BN_A$ 下 $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ 可成为左 B-模，而在情形 ${}_BM_A$, ${}_CN_A$ 下 $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ 可成为 C-B-双模。这时有下面

命题3.4（《共轭公式》） 在情形 M_A, ${}_AN_B$, L_B 下存

在唯一的同构对应

$$\mathrm{Hom}_B(M\otimes_A N,\ L)\rightleftarrows\mathrm{Hom}_A(M,\mathrm{Hom}_B(N,L)),$$

它将同态 $\varphi: M\otimes_A N\to L$ 映到同态 $\bar{\varphi}: M\to\mathrm{Hom}_B(N,L)$，使得 $\bar{\varphi}(x)(y)=\varphi(x\otimes_A y)$.

证：容易验证 $\bar{\varphi}$ 是 A-模之间的同态．今构造其逆映射．令 $\psi: M\to\mathrm{Hom}_B(N,L)$ 是 A-模同态．此时易见，把 (x,y) 变到 $\psi(x)(y)$ 的映射 $M\times N\to L$ 是一个内 A-双线性映射，因而它确定一个映射 $\bar{\psi}: M\otimes_A N\to L$，使得 $\bar{\psi}(x\otimes_A y)=\psi(x)(y)$．容易验证 $\bar{\psi}$ 是 B-模同态，并且这样建立的这两个映射 $\mathrm{Hom}_B(M\otimes_A N,L)\leftrightarrows\mathrm{Hom}_A(M,\mathrm{Hom}_B(N,L))$ 是互逆的．

下面这个所谓《正合性质》是函子 $\otimes$ 和 Hom 的重要性质．

命题3.5 (*a*) A-模列

$$0\to M_1\xrightarrow{f}M_2\xrightarrow{g}M_3 \qquad (1)$$

是正合的，当且仅当对任意 A-模 N 叙列

$$0\to\mathrm{Hom}_A(N,M_1)\xrightarrow{h_N(f)}\mathrm{Hom}_A(N,M_2)\xrightarrow{h_N(g)}\mathrm{Hom}_A(N,M_3) \qquad (2)$$

是正合的．

(*b*) A-模列

$$M_1\xrightarrow{f}M_2\xrightarrow{g}M_3\to 0 \qquad (1')$$

是正合的，当且仅当对任意 A-模 N 叙列

$$0\to\mathrm{Hom}_A(M_3,N)\xrightarrow{h_N^0(g)}\mathrm{Hom}_A(M_2,N)\xrightarrow{h_N^0(f)}\mathrm{Hom}_A(M_1,N) \qquad (2')$$

是正合的。

证：假设叙列（1）是正合的。此时 f 是单射，并且如果 $h_N(f)\varphi=f\varphi=0$，其中 $\varphi:N\to M_1$，则必 $\varphi=0$，即 $h_N(f)$ 是单射，而叙列（2）在项 $\mathrm{Hom}_A(N,M_1)$ 处是正合的。因为 $\mathrm{Im}f=\mathrm{Ker}g$，$gf=0$，因而 $h_N(g)h_N(f)=h_N(gf)=0$。这说明 $\mathrm{Im}h_N(f)\subset\mathrm{Ker}h_N(g)$。今设 $\varphi\in\mathrm{Ker}h_N(g)$，其中 $\varphi:N\to M_2$。换言之，有 $h_N(g)\varphi=g\varphi=0$。此时 $\mathrm{Im}\varphi\subset\mathrm{Ker}g=\mathrm{Im}f$。但同态 f 给出同构对应 $M_1\simeq\mathrm{Im}f$，因而 φ 可以表成乘积 $f\psi$，其中 $\psi:N\to M_1$，即 $\varphi=h_N(f)\psi\in\mathrm{Im}h_N(f)$，故叙述（2）在项 $\mathrm{Hom}_A(N,M_2)$ 处是正合的。

反过来，设对于任意 N，叙列（2）是正合的。把 N 取为 $\mathrm{Ker}f$，我们得对应 $\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Ker}f,M_1)\to\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Ker}f,M_2)$ 是单射。但若 φ 是 $\mathrm{Ker}f$ 到 M_1 内的嵌入，则 $f\varphi=0$，由之得 $\varphi=0$ 即 $\mathrm{Ker}f=0$，故 f 是单射。

今设 $N=M_1$。此时 $f=f1_N=h_N(f)(1_N)\in\mathrm{Im}h_N(f)=\mathrm{Ker}h_N(g)$，因而 $gf=h_N(g)(f)=0$，即是 $\mathrm{Im}f\subset\mathrm{Ker}g$。最后，令 $N=\mathrm{Ker}g$，φ 为 N 到 M_2 的嵌入。此时 $h_N(g)(\varphi)=g\varphi=0$，这就是说，$\varphi\in\mathrm{Ker}h_N(g)=\mathrm{Im}h_N(f)$，即是 $\varphi=f\psi$，由之有 $\mathrm{Ker}g=\mathrm{Im}\varphi\subset\mathrm{Im}f$，因而叙列（1）是正合的。

类似地可证得结论（b）。

利用共轭公式可把正合性质转移到张量积上。

命题3.6 若右 A-模列

$$M_1\longrightarrow M_2\longrightarrow M_3\longrightarrow 0 \qquad (3)$$

是正合的，则对任意 A-B-双模 N，B-模列

$$M_1\otimes_A N\longrightarrow M_2\otimes_A N\longrightarrow M_3\otimes_A N\longrightarrow 0 \qquad (4)$$

也是正合的。

证：依命题3.5，我们只需对于任意 B- 模L检证一下叙列

$$0\to \mathrm{Hom}_B(M_3\otimes_A N,\ L)\to \mathrm{Hom}_B(M_2\otimes_A N,\ L)\to \mathrm{Hom}_B\ (M_1\otimes_A N,\ L)$$

的正合性。但依命题 3.4，此叙列可以改写为：

$$0\to \mathrm{Hom}_A(M_3,\mathrm{Hom}_B(N,L))\to \mathrm{Hom}_A(M_2,\mathrm{Hom}_B(N,L))\to \mathrm{Hom}_A(M_1,\mathrm{Hom}_B(N,L)),$$

这时它的正合性便可由命题3.5立得。

上述性质常说成：《函子 Hom 是左正合的，而函子 $\otimes$ 是右正合的》，或者更准确些说，函子 h_N 和 h_N^0 是左正合的，而函子$\otimes_A N$是右正合的。当然函子$M\otimes_A$也是右正合的（其证明类似于命题3.6）。

在本节结束时，我们指出下面这个简单事实。

命题3.7 把元素m映到 $m\otimes_A 1$的映射$M\to M\otimes_A A$ 是右 A- 模的同构对应。把元素 n 映到 $1\otimes_A n$ 的映射 $N\to A\otimes_A N$ 是左A-模的同构对应。

为了证明只需指出，把 (m,a) 映到 ma 的映射 $M\times A\to M$ 显然是内双线性的，并且由它导出的对应 $M\otimes_A A\to M$ 是同态对应，后者和给出的映射互逆。

§ 4 Morita 定理

在本节中我们将弄清，对于什么样代数A和 B，模范畴 mod-A 和 mod-B 是《同样构成的》。对此，首先该把《同样构成的》这个词组的意义说准确，即是要指明，我们将认定什么样的范畴是相同的。可以如下来定义范畴C和C'的同

构：同构指一个函子 $F:C\to C'$，它有逆函子$G:C\to C'$，即是 $GF=1_C$，$FG=1_{C'}$。这个定义看来是不成功的。第一，在自然出现的函子中一般没有这样子的，第二，某些范畴，从自然的角度来看是《相同的》，但在这种意义下却是不同构的。矩阵范畴 Mat 和向量空间范畴 Vect 可以作为这样的例子。这样现象的原因是清楚的：矩阵范畴刻划向量空间只《精确到同构》，而在范畴 Vect中每一个空间都有许多《同构的样本》。因而在它们间无法建立一一对应。

更自然地方式是，不去利用函子的等式，而用函子间的同构。下面给出准确定义。

设F和G是范畴C到范畴C'的两个函子。φ 是一个映射，它把范畴C的每一个象元 $X\in \mathrm{Ob}C$ 映到范畴 C' 的一个射元 $\varphi(X):F(X)\to G(X)$上，并且对于范畴 C 的任意一个射元 $f:X\to Y$. 下面图

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\varphi(X)} & G(X) \\ {\scriptstyle F(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(f)} \\ F(Y) & \xrightarrow{\varphi(Y)} & G(Y) \end{array}$$

是交换的。这时我们称映射 φ 为函子F到函子 G的一个**自然同态**或**同态**，并记作 $\varphi:F\to G$。

若是再给一个函子 $H:C\to C'$ 和函子G和 H间的一个同态映射 $\psi:G\to H$，则可以定义乘积$\psi\varphi:F\to H$为$(\psi\varphi)(X)=\psi(X)\varphi(X)$。易见，在这样的定义下，由范畴$C$到范畴$C'$的函子以及它们之间的同态映射全体组成**函子范畴** $Func(C,C')$ 。此外，在此范畴中射元 $\varphi:F\to G$ 是同构，当且仅当对任意象元$X\in \mathrm{Ob}C$，射元 $\varphi(X)$ 是同构。在这种情形下，

我们说φ是函子间的同构，记作 $\varphi: F \stackrel{\sim}{\to} G$ 或 $F \simeq G$。

这样，不难确信，在命题3.3和3.4中建立的同构，实际上就是相应函子间的同构。

设有函子对 $F: C \to C'$ 和 $G: C' \to C$ 满足条件$GF \simeq 1_C$，$FG \simeq 1_{C'}$。我们称这样的函子对为范畴C和C'间的一个**等价对应**。如果这样的等价对应存在，就是范畴C和C'是**等价的**。

在后面，我们需要范畴间等价对应下面这些简单性质。

命题4.1 若函子对 $F: C \to C'$ 和 $G: C' \to C$是范畴间的等价对应，则

（1）把 f 映到 $F(f)$ 的映射 $\mathrm{Hom}_C(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{C'}(F(X), F(Y))$ 是一一映射；

（1′）把 g 映到 $G(g)$的映射 $\mathrm{Hom}_{C'}(U, V) \to \mathrm{Hom}_C(G(U), G(V))$ 是一一映射；

（2）射元 $f \in \mathrm{Mor} C$是同构，当且仅当 $F(f)$是同构；

（2′）射元 $g \in \mathrm{Mor} C'$是同构，当且仅当 $G(g)$是同构；

（3）每一象元$X \in \mathrm{Ob} C$ 同构于形如 $G(U)$的象元，其中$U \in \mathrm{Ob} C'$；

（3′）每一象元$U \in \mathrm{Ob} C'$同构于形如 $F(X)$ 的象元，其中$X \in \mathrm{Ob} C$。

我们给出（1）和（1′）的证明，其余的作为容易的练习留给读者。

设 $f: X \to Y$是范畴C的一个射元。用 φ 表示函子间的同构 $GF \stackrel{\sim}{\to} 1_C$而来考察交换图

$$\begin{array}{ccc} GF(X) & \xrightarrow{\varphi(X)} & X \\ {\scriptstyle GF(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ GF(Y) & \xrightarrow{\varphi(Y)} & Y \end{array}$$

因为$\varphi(X)$是同构，故$f=\varphi(Y)GF(f)\varphi(X)^{-1}$。这说明由$F(f)=F(f')$可得$f=f'$，即映射$\mathrm{Hom}_C(X,Y)\to\mathrm{Hom}_{C'}(F(X),F(Y))$是单射。同样可证$\mathrm{Hom}_{C'}(U,V)\to\mathrm{Hom}_C(G(U),G(V))$也是单射。

今取任意一个射元$g:F(X)\to F(Y)$。设

$$f=\varphi(Y)G(g)\varphi(X)^{-1},\quad g'=F(f).$$

此时和上面一样有$f=\varphi(Y)G(g')\varphi(X)^{-1}$，由之以及$\varphi(X)$和$\varphi(Y)$是同构便得$G(g)=G(g')$。随之，$g=g'=F(f)$，这说明映射$\mathrm{Hom}_C(X,Y)\to\mathrm{Hom}_{C'}(F(X),F(Y))$是一一的。

下面转来讨论模范畴。设函子对F,G是范畴mod-A和mod-B的一个等价对应。把命题4.1和正合性判断准则（命题3.5）连在一起考虑，便得下面的命题。

命题4.2 (*a*) A-模列

$$0\longrightarrow M_1\xrightarrow{f}M_2\xrightarrow{g}M_3$$

是正合的，当且仅当B-模列

$$0\longrightarrow F(M_1)\xrightarrow{F(f)}F(M_2)\xrightarrow{F(g)}F(M_3)$$

是正合的。

(*b*) A-模列

$$M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$$

是正合的，当且仅当 B-模列

$$F(M_1) \xrightarrow{F(f)} F(M_2) \xrightarrow{F(g)} F(M_3) \longrightarrow 0$$

是正合的。

(c) A-模 P 是投射的，当且仅当 B-模 $F(P)$ 是投射的。

证： 我们来证明 (c)，而把(a)(b)留给读者。为此我们利用投射性的《图式》定义(参看 § 2 例 4)。假设 $F(P)$ 是投射模，并给出 A-模图

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & & \downarrow f & & \\ M & \xrightarrow{\pi} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

其中的列是正合的。应用函子 F，便得 B-模图

$$\begin{array}{ccccc} & & F(P) & & \\ & & \downarrow F(f) & & \\ F(M) & \xrightarrow{F(\pi)} & F(N) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

其中的列也是正合的（根据结论(b)）。它可以扩充成交换图

$$\begin{array}{ccccc} & \swarrow^{g} & F(P) & & \\ & & \downarrow F(f) & & \\ F(M) & \xrightarrow{F(\pi)} & F(N) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

并且依命题 4.1 存在一个射元 $\bar{f}: P \to M$，使得 $g = F(\bar{f})$。但此时有 $F(\pi\bar{f}) = F(\pi)F(\bar{f}) = F(\pi)g = F(f)$，由之得 $\pi\bar{f} =$

f，即是图

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & \overset{\bar{f}}{\swarrow} & \downarrow f & & \\ M & \xrightarrow{\pi} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

是交换的，因而 P 是投射模。

反之，若是P为投射模，则与之同构的 $GF(P)$ 也是投射模，此时由刚证过的便知$F(P)$ 是投射模。

推论4.3 设函子对 F，G 是范畴 mod-A 和 mod-B 间的一个等价对应，$P=G(B)$。此时必有 P 是投射 A-模且 $E_A(P)\simeq B$，而对任意A-模M存在满同态$nP\to M$（对某个n）。

在这种情况我们说A-模P是**生成子**。

证：P 的投射性由 B-模B 的投射性以及命题4.2而得。其次，依命题4.1，有$E_A(P)\simeq E_B(B)\simeq B$。最后，任意 A-模M必同构于形如 $G(N)$ 的模，其中N是某个 B-模。但另一方面，存在满同态 $nB\to N$，它导出满同态 $G(nB)\simeq nP\to G(N)\simeq M$，这也就是要证的。

今取定一个投射 A-模 P，并设 $B=E_A(P)$。这时我们说 B 是代数A的一个**伴侣**。此时我们可定义两个函子 F：mod-$A\to$mod-B 和 G：mod-$B\to$mod-A 如下：令 $F(M)=\mathrm{Hom}_A(P,M)$，$G(N)=N\otimes_B P$（把P看作左 B-模）。还可依下法定义函子的同态对应 φ:$1_{\mathrm{mod}-B}\to FG$ 和 ψ:$GF\to 1_{\mathrm{mod}-A}$。对任意B-模N取 $\varphi(N)$ 为同态对应 $N\to\mathrm{Hom}_A(P,N\otimes_B P)$，它把元素 $x\in N$ 映到映射$\bar{x}:P\to N\otimes_B P$，这里$\bar{x}$的定义为 $\bar{x}(p)=p\otimes_B x$。对任意 A-模M 取 $\psi(M)$为同态对

应 $\mathrm{Hom}_A(P,M)\otimes_B P \to M$， 它 把 $f\otimes_B p$ （其中 $f\in \mathrm{Hom}_A(P,M)$ ，$p\in P$）映到 $f(p)\in M$。易验，φ 和 ψ 确是函子间的同态映射。

我们指出，一般说不是任意 A-模都同构于形如 $G(N)$ 的模。事实上，永远有满同态 $f: nB\to N$。设 $N'=\mathrm{Ker}f$ 而 g 是满同态 $mB\to N'$。此时有正合列

$$mB \xrightarrow{g} nB \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$$

随之，叙列

$$G(mB) \xrightarrow{G(g)} G(nB) \xrightarrow{G(f)} G(N) \longrightarrow 0$$

也是正合的。

但 $G(nB)\simeq nP$，$G(mB)\simeq mP$，即是说，如果有 $M\simeq G(N)$，则必存在形如

$$mP \longrightarrow nP \longrightarrow M \longrightarrow 0 \qquad (1)$$

的正合列。

因此，很自然地来考虑另一个范畴 mod-P，它的象元是一切具有形如正合列（1）的A-模，而射元是这样模之间所有同态映射。

定理4.4 函子对 $F=h_P$ 和 $G=\otimes_B P$ 是范畴mod-P 和 mod-B 之间的一个等价对应。

证：我们来证明，$\varphi: 1_{\text{mod-}B}\xrightarrow{\sim} FG$，而 $\psi: GF\xrightarrow{\sim} 1_{\text{mod-}P}$。事实上，$\varphi(B)$ 就是自然同构对应

$$B=\mathrm{Hom}_A(P,P)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_A(P,B\otimes_B P)=FG(B)。$$

此时显然 $\varphi(nB)$ 也是同构对应。然而，我们已经知道，对于任意 B-模可构成正合列

$$mB \xrightarrow{g} nB \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0 .$$

对它应用一下函子 FG。由于G是右正合函子，而 F 是正合的（因为P是投射模），故得其中列都是正合的交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
mB & \xrightarrow{g} & nB & \xrightarrow{f} & N & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow{\scriptstyle \varphi(mB)} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi(nB)} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi(N)} & & \\
FG(mB) & \xrightarrow[FG(g)]{} & FG(nB) & \xrightarrow[FG(f)]{} & FG(N) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

因为 $\varphi(mB)$和 $\varphi(nB)$ 是同构对应，由五同态预理（预理2.1）得 $\varphi(N)$ 也是同构对应，这也就是要证的。

类似地可以证明，对于任意模 $M \in \text{mod-}P$ 同态对应 ψ （M）也是同构对应。

由定理4.4和推论4.3可得下述结果。

推论4.5 (Morita 定理) 范畴 mod-A 和 mod-B 是等价的，当且仅当存在一个投射生成 A-模P（即指P是投射模且是生成 A-模），使得 $E_A(P) \simeq B$。在这种情形下函子对 $F = h_P$ 和 $G = \otimes_B P$ 给上述范畴间的一个等价对应。

Morita 还证明了，实际上范畴间的任意等价对应都具有此推论中给出的形式。

范畴间等价的条件有如下简单的意义。设$A \simeq k_1 P_1 \oplus \cdots \oplus k_t P_t$ 是正则A-模表成主模直和的一个分解，且当 $i \neq j$时，$P_i \neq P_j$。若 P是投射生成 A-模，则存在满同态 $nP \to A$，由之有 $nP \simeq A \oplus M$。这时据 Krull-Шмидт 定理，所有模P_1，…，P_t 都必作为直和项出现在P中。又因为任意投射模都是

一些主模的直和，故知投射生成模恰是这样的投射模，所有主 A-模都作为直和项在其中出现。注意到定理Ⅱ.5.6，我们看到范畴 mod-A 和 mod-B 是等价的，当且仅当代数 A 和B是同型的，即是它们的基代数是同构的。特别，Morita 定理使我们研究模时可以局限当 A 是既约代数的情形。此外，第三章中 § 5 中的结果可使我们刻划其上的模范畴互相等价的所有代数。

§ 5　张量代数和继承代数

在本节我们将给出《路代数》构成（第三章 § 6）的一个推广。双模的张量代数就是这样的推广。

设B是一个代数，V 是 B 上双模。此时，$V^{\otimes 2}=V\otimes_B V$ 仍可看成 B-双模。重复这个程序，令 $V^{\otimes k}=V^{\otimes(k-1)}\otimes_B V$，可对所有$k\geqslant 2$ 构造 B-双模 $V^{\otimes k}$。此外，为了方便，规定 $V^{\otimes 0}=B$，$V^{\otimes 1}=V$。由张量积的结合性直接可得 $V^{\otimes k}\otimes_B V^{\otimes m}\simeq V^{\otimes(k+m)}$。在以后我们将利用这个同构对应而把 $V^{\otimes k}\otimes_B V^{\otimes m}$ 和 $V^{\otimes(k+m)}$ 等同起来。

现在来研究直和 $T(V)=\bigoplus\limits_{k=0}^{\infty}V^{\otimes k}$。$T(V)$中的元素是有限和 $\sum\limits_k t_k$，其中 $t_k\in V^{\otimes k}$。上面刚建立的同构对应使得可以对元素 $t_k\in V^{\otimes k}$ 和 $t_m\in V^{\otimes m}$ 定义乘法：$t_k t_m=t_k\otimes_B t_m\in V^{\otimes(k+m)}$。这个乘法依线性关系可扩张到整个 $T(V)$ 上，而使$T(V)$ 成为代数（一般言，是无限维的）。称之为 B-双

模V的张量代数。

由构造方法知$T(V)$包含子代数$B=V^{\otimes 0}$和B-子双模$V=V^{\otimes 1}$。并且$T(V)$ 是具有此性质的泛代数，这可由下面定理看出。

定理5.1 设$\varphi:B\to A$是代数的同态，而$f:V\to A$是B-双模[17]的同态。这时必有代数的同态$F:T(V)\to A$，局限在B上它和φ重合，局限在V上和f重合。

证： 同态f导出B-双模同态$f^{\otimes k}:V^{\otimes k}\to A^{\otimes k}$。另一方面，把$a_1\otimes_B a_2\otimes_B\cdots\otimes_B a_k$映到$a_1a_2\cdots a_k$，这样代数$A$中的乘法就导出双模的同态$A^{\otimes k}\to A$。如是，我们便得一系列同态$f_k:V^{\otimes k}\to A$，使得$f_k(v_1\otimes_B\cdots\otimes_B v_k)=f(v_1)f(v_2)\cdots f(v_k)$。显然这就使我们得到代数的同态$F:T(V)\to A$（当然还要令$f_0=\varphi$，$f_1=f$）。由于$B$和$V$中的元素生成(作为代数)$T(V)$，故得$F$的唯一性。

和通常一样，定理 5.1 中所表述的泛性在同构的意义下唯一地决定代数$T(V)$。

在代数 $T(V)$ 中很自然地出现一个理想 $J=J(V)=\bigoplus_{k=1}^{\infty} V^{\otimes k}$。我们将称之为张量代数的**基本理想。**

对于某个自然数k满足关系$J^2\supset I\supset J^k$的理想$I\subset T(V)$，我们将称之为**规则的。**

对于我们最重要的情形是当代数B是半单的（甚至还是分离的）。原来，在这种情形，B-双模的张量代数起着《泛

(17) 对任意$a\in A$，b_1，$b_2\in B$令$b_1ab_2=\varphi(b_1)a\varphi(b_2)$，这样$A$便成为$B$-双模。

复盖的》作用，类似于路代数在可裂情形下所起的作用（参看定理Ⅱ.6.6.）。

定理5.2 设A是有限维代数，$R=\mathrm{rad}A$，$B=A/R$。假设代数B是分离的。此时代数A必同构于代数$T(V)$关于某个规则理想的商代数，其中$V=R/R^2$。

证：依 Wedderburn-Мальцев 定理（定理Ⅵ.2.1），在A中含有一个子代数$\overline{A}\simeq B$。这使得可以定义代数的单同态$\varphi: B\to A$，并把A看成为B-双模。此外，$A=\overline{A}\oplus R$（作为B-双模）。由于$B\otimes B^0$是半单代数（定理Ⅵ.1.1），故任一B-双模都是半单的。特别，在R内有一B-子双模$\overline{R}$使得$R=\overline{R}\oplus R^2$。显然，此时$\overline{R}\simeq V$，且利用这个同构可定义B-双模单同态$f: V\to R$。

依定理5.1，存在同态$F: T(V)\to A$，它在B上与φ重合，而在V上与f重合。这时F导出代数的同构$T(V)/J^2\simeq A/R^2$。这说明$I=\mathrm{Ker}F\subset J^2$。另一方面，有$F(J)\subset R$。这说明$F(J^k)\subset R^k$，又因为$R$是幂零的，故有某个$k$使$F(J^k)=0$，即$J^k\subset I$，因而$I$是规则的。

这里指出，我们有$F(B)=\varphi(B)=\overline{A}$，且$F(V)=f(V)=\overline{R}$。随之，任意元素$r\in R$具有形状$r=F(x)+r'$，此处$x\in J$，$r'\in R^2$。由之显然得任意元素$r\in R^i$具有形状$F(x)+r'$，此处$x\in J^i$而$r'\in R^{i+1}$。由于根的幂零性，我们有等式$F(J)=R$。这说明$F$是满同态且$A\simeq T(V)/I$，这也就是要证的。

令$B=A/R$，$V=R/R^2$。我们将称二元组(B,V)为**代数A的型**。若B是分离代数，将称A为**分离型代数**。显然，型决定代数A的格式$S(A)$（参看第三章§6）。因此我们将

称此格式为型(B,V)的格式。

显然，如果B是半单代数，V是有限维B-双模，则对任意规则理想I，商代数$T(V)/I$是有限维的，并且具有型(B,V)。特别，商代数$T(V)/J^2$是具有给定型的最小(指就维数而言）代数。

在上面我们已经提过，一般说$T(V)$是无限维的。不难给出保证它是有限维的条件。

命题5.3 设B是半单代数，V是有限维B-双模。代数$T(V)$是有限维的，当且仅当型(B,V)的格式中没有圈。

证：显然，$T(V)$是有限维的，当且仅当存在一个m，使$V^{\otimes m}=0$。今把B表成单代数的直积：$B=B_1\times\cdots\times B_n$。设$1=e_1+\cdots+e_n$是相应的单位元中心分解，而$V_{ij}=e_iVe_j$。在型$(B,V)$的格式$S$中有从点$i$到点$j$的射线当且仅当$V_{ij}\neq 0$。这里我们有$V=\bigoplus_{i,j}V_{ij}$（作为$B$-双模），并且$V_{ij}\otimes_B V_{kl}\neq 0$当且仅当$V_{ij}\neq 0$，$V_{kl}\neq 0$，以及$j=k$。因此$e_iV^{\otimes 2}e_j\neq 0$当且仅当由点$i$到点$j$有长为2的路，类似地$e_iV^{\otimes m}e_j\neq 0$当且仅当由点$i$到点$j$有长为$m$的路，由之便得定理中的结论。

现在应用这里得到的技巧去刻划继承代数，即是其所有右理想都是投射模的代数（参看第三章§7）。

定理5.4 具分离型(B,V)的有限维继承代数A同构于$T(V)$。反之，若在型(B,V)的格式中没有圈，则$T(V)$是有限维继承代数。

证：首先验证一下，$T=T(V)$是继承代数。先指出下面一点，由于$T(V)/J\simeq B$是半单代数，且有m使$J^m=0$(命题

5.3），故有 $J=\mathrm{rad}T$（命题Ⅱ.1.13）。设 $1=e_1+\cdots+e_n$ 是代数 B 的单位元的极小分解（显然，它也是代数 T 的单位元的极小分解）。

若 $P_i=e_iT=\bigoplus_{k=0}^{\infty}e_iV^{\otimes k}$，则有

$$P_iJ=e_iJ=\bigoplus_{k=1}^{\infty}e_iV^{\otimes k}=e_iV\otimes_B T.$$

但 $e_iV\simeq\bigoplus_{j=1}^{n}s_iU_j$，其中 U_j 是单 B-模，故知

$$P_iJ\simeq\bigoplus_{j=1}^{n}s_j(U_j\otimes_B T)\simeq\bigoplus_{j=1}^{n}s_jP_j$$

是投射模。随之 $J=\bigoplus_{i=1}^{n}e_iJ$ 是投射模而 T 是继承代数（定理Ⅱ.7.1）。

由于定理5.2剩下来只需证明：如果 $A=T/I$ 是继承代数，其中 I 是规则理想，则 $I=0$（提醒一下，依推论Ⅱ.7.3，在继承代数的格式中没有圈）。令 $R=J/I=\mathrm{rad}A$，$\widetilde{P}_i=P_i/P_iI$ 是主 A-模。今对 k 作归纳法来证明 $R^k/R^{k+1}\simeq J^k/J^{k+1}$.归纳法的出发点 $k=1$ 的情形,则可由 $I\subset J^2$ 得出。

假设 $R^{k-1}/R^k\simeq J^{k-1}/J^k, k\geqslant 2$ 而考查 $\widetilde{P}=P(R^{k-1}/R^k)$.

设 $\widetilde{P}\simeq\bigoplus_{i=1}^{n}s_i\widetilde{P}_i$。依定理Ⅱ.3.7，$\widetilde{P}=P(R^{k-1})$.因为 R^{k-1} 是投射模，故 $\widetilde{P}\simeq R^{k-1}$。这时有 $R^k\simeq\widetilde{P}R$，而 $R^k/R^{k+1}\simeq\widetilde{P}R/$

$\tilde{P}R^2$. 但是，由于 $R/R^2 \simeq J/J^2$ 而 $P = P(J^{k-1}/J^k) \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} s_i P_i$，由之得 $R^k/R^{k+1} \simeq PR/PR^2 \simeq J^k/J^{k+1}$，这就是要证的。因此对任意 $k \geqslant 2$ 有 $I \subset J^k$，再由 J 的幂零性便得 $I = 0$。定理证完。

习　题

1. 证明下列每一范畴与其对偶范畴等价：

a) 有限维向量空间的范畴；

b) 有限 Abel 群的范畴。（提示：利用第七章的习题5.）

2. 设交换图

$$\begin{array}{ccccccc} M_1 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & M_4 \\ \alpha_1 \downarrow & & \alpha_2 \downarrow & & \alpha_3 \downarrow & & \alpha_4 \downarrow \\ N_1 & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & N_3 & \longrightarrow & N_4 \end{array}$$

的每一列都是正合的。试证：

a) 若 α_1 是满同态，α_2 和 α_4 是单同态，则 α_3 也是单同态；

b) 若 α_4 是单同态，α_1 和 α_3 是满同态，则 α_2 也是满同态。

3. 3×3 预理。证明：若在交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & N_1 & \longrightarrow & L_1 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & L_2 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & N_3 & \longrightarrow & L_3 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

中所有行以及任意两个列是正合的，则第三个列也是正合的。

4.一个交换图

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\bar{f}} & L \\ {\scriptstyle \bar{g}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

叫作 **Decart 方**，如果对于任意交换图

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\xi} & L \\ {\scriptstyle \eta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

存在唯一同态 $\varphi: Y \to X$，使得 $\xi = \bar{f}\varphi, \eta = \bar{g}\varphi$。

证明，任一对同态 $f: M \to N$ 和 $g: L \to N$ 都可嵌入一个 Decart 方中（提示：考虑 $M \oplus L$ 中的子模 $\{(x, y) | f(x) = g(y)\}$）。这样方的唯一性如何？

5.设给定正合列

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

和任意一个同态 $\varphi: N' \to N$。考虑图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f'} & M' & \xrightarrow{g'} & N' & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle 1_L}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi'} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \\ 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

其中右侧方图是 Decart 方，而 f' 由等式 $f = \varphi' f'$ 和 $g' f' = 0$ 确定（由 Decart 方的定义知这些等式唯一地确定f'）。

证明，此图的上列是正合的（此列称作给定列延φ的**提升**）。

6．（Schanuel预理）．证明：若给定两个正合列

$$0 \longrightarrow N_1 \longrightarrow P_1 \xrightarrow{f_1} M \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow N_2 \longrightarrow P_2 \xrightarrow{f_2} M \longrightarrow 0$$

其中P_1，P_2都是投射模，则$P_1 \oplus N_2 \simeq P_2 \oplus N_1$。（提示：考察第一列延$f_2$的提升，以及第二列延$f_1$的提升．）

7.证明：左投射A-模范畴和右投射A-模范畴的对偶范畴是等价的。（提示：利用函子$h_A^\circ = \mathrm{Hom}_A(\cdot, A)$。）

8.证明：对于任意A-模M存在正合列

$$P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

其中P_1, P_0是投射模，使得$\mathrm{Ker} f_0 \subset \mathrm{rad} P_0$，$\mathrm{Ker} f_1 \subset \mathrm{rad} P_1$，并且如果

$$Q_1 \xrightarrow{g_1} Q_0 \xrightarrow{g_0} M \longrightarrow 0$$

是另一个具有这些性质的列，则存在有交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
P_1 & \xrightarrow{f_1} & P_0 & \xrightarrow{f_0} & M & \longrightarrow & 0 \\
{\scriptstyle\varphi_1}\downarrow & & {\scriptstyle\varphi_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1_M} & & \\
Q_1 & \xrightarrow{g_1} & Q_0 & \xrightarrow{g_0} & M & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

其中φ_0和φ_1是同构。

9．（M. Auslander）．设对A-模M可得一正合列

$$P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0,$$

它具有上一习题中所列举的性质。设$\mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Coker}\, h_A^\circ(f_1)$

（参看§1中函子的例6以及习题7。）

a）证明，在同构的意义下，$\mathrm{Tr}(M)$ 与具有上述性质的正合列之选择无关。

b）试验证，正合列

$$h_A^0(P_0)\xrightarrow{h_A^0(f_1)} h_A^0(P_1)\longrightarrow \mathrm{Tr}(M)\longrightarrow 0$$

也具有习题8中列举的性质。

c）证明，$\mathrm{Tr}(M)$ 不含投射直和项。

d）证明，若$M=P\oplus N$，其中P是投射模，而N不包含投射直和项，则$\mathrm{Tr}(\mathrm{Tr}(M))\simeq N$。

10.在定理4,4中的符号下，证明，如果U是单A-模而$F(U)\neq 0$，则$F(U)$也是单B-模，并且若U'是不同构于U的单模，则$F(U')\not\simeq F(U)$。

11.设$1=e_1+\cdots+e_n$，$n\geqslant 2$，是代数A的单位元的极小分解式。证明，代数A是半单（分离）的，当且仅当对任意足码对$i\neq j$代数eAe是半单（分离）的，其中$e=e_i+e_j$。

12.证明，如果代数A是继承的，P是投射A-模而$B=E_A(P)$，则代数B也是继承的。

13.令S表示形如



的格式，并设A是路代数$K(S)$关于由一个元素$\sum\limits_{i=1}^{n}\sigma_i\tau_i$生

成的理想的商代数。证明，A不是继承代数，但对任意异于单位元的幂等元$e\in A$代数eAe是继承的（提示：若S'是由格式S的部份（不是全部的）点以及连接它们的全部射线组成的格式，而e是格式S'中长为零的路之和，则$eAe\simeq K(S')$。）

下面一组习题（14—19）都是关于张量积的一个应用——群的导出表示论。设H是群G的子群，N是一个KH-模。这时导出KG-模$\mathrm{Ind}_H^G(N)$定义为$N\otimes_{KH}KG$。若T是群H相应于模N的表示，而χ是它的特征标，则群G相应于模$\mathrm{Ind}_H^G(N)$的表示称作T**导出的表示**，而它的特征标$\mathrm{Ind}_H^G(\chi)$叫作χ**导出的特征标**。任一KG-模当然都可看成为KH-模，这时记作$\mathrm{Res}_H^G(M)$并称之为M在子群H上的**局限**。

14．(Frobenius相互律)．设M是一个KG-模，χ是它的特征标，N是一个KH-模，ψ是它的特征标。

a）证明

$$\mathrm{Hom}_{KG}(\mathrm{Ind}_H^G(N),\ M)\simeq \mathrm{Hom}_{KH}(N,\ \mathrm{Res}_H^G(M))\ .$$

b）证明，若$n=(G:1), m=(H:1)$，则

$$\frac{1}{n}\sum_{g\in G}\mathrm{Ind}_H^G\psi(g)\chi(g^{-1})=\frac{1}{m}\sum_{h\in H}\psi(h)\mathrm{Res}_H^G\chi(h^{-1}).$$

（提示：利用第七章中的习题14。）

c）由a）推出：若域K的特征不整除群G的元数，M是单KG-模，而N是单KH-模，则M在$\mathrm{Ind}_H^G(M)$中出现的重数等于N在$\mathrm{Res}_H^G(M)$中出现的重数。

15.设$F\supset H$是G的两个子群.证明,对于任意KH-模N有$\mathrm{Ind}_H^G(N)\simeq\mathrm{Ind}_F^G(\mathrm{Ind}_H^F(N))$.

16.(Makki 公式).设F和H是群G的两个子群,$\sigma_1,\cdots,\sigma_s$是G关于H和F双陪集的代表元集(即$G=\sum_{i=1}^{s}H\sigma_iF$,并且这些类两两不交).令$H_i=(\sigma_i^{-1}H\sigma_i)\cap F$.任意$KH$-模$N$可变成$KH_i$-模,为此只要对任意$h$规定$x(\sigma_i^{-1}h\sigma_i)=xh$.把此$KH_i$-模记作$N_i$.证明,对任意$KH$-模$N$,有

$$\mathrm{Res}_F^G(\mathrm{Ind}_H^G(N))\simeq\bigoplus_{i=1}^{s}\mathrm{Ind}_{H_i}^F(N_i).$$

(提示:作为KH-KF-双模KG可分解成直和$\bigoplus_{i=1}^{s}V_i$,其中V_i是具基$\{h\sigma_if\mid h\in H,f\in F\}$的子空间. 验证$V_i\simeq\mathrm{Ind}_{H_i}^F(KH_i)$(作为$KF$-模),并把这个同构对应扩展到整个$KH$-模上(例如,可仿照定理4.4的证明去作).)

17.a)利用习题14和16的结果去证明:若K是特征为0的域,则KG-模$\mathrm{Ind}_H^G(N)$是单的,当且仅当KH-模N是单的且对任意i,KH_i-模N_i和$\mathrm{Res}_{H_i}^H(N)$没有同构的直和项(此处H_i,N_i的意义如习题16,只是取$F=H$).

b)由上推得,若H是正规子群,则表示$\mathrm{Ind}_H^G(T)$是既约的,当且仅当T是既约的且对任意$\sigma\notin H$,T不同构于表示T_σ,这里$T_\sigma(h)=T(\sigma^{-1}h\sigma)$.

18.a)证明G的子群H的任一不可分解表示同构于某个

形如 $\mathrm{Res}_H^G(T)$（此处T是群G的不可分解表示）的直和项。

b）设域K的特征p不整除指数（$G:H$），试证：群G的任一不可分解表示同构于某一形如$\mathrm{Ind}_H^G(T)$的表示的直和项，此处T是H的不可分解表示。（提示：对任意KG-模M可作KG-模间的一个满同态$\tau: M\otimes_{KH}KG\to M$，它作为$KH$-模的满同态是可裂的，再利用第七章中习题18。）

19. 利用上一习题以及第七章中习题21和22的结果来证明：群G在特征p的域上的不可分解表示共有有限个当且仅当G的P-Sylow子群是循环群（Higman定理）。

第九章　拟Frobenius代数

在有限维代数的理论中，右模范畴与左模范畴之间的对偶性起着重要的作用。我们将要在本章建立这种对偶性，讨论其性质，并利用所得结果研究两种代数：由Nakayama提出的拟Frobenius代数和Asano提出的单列代数或称主理想代数。

§1　对偶性　内射模

首先，我们在某个有限维代数的左模和右模范畴之间建立对偶性。这种对偶性可以如下定义。

任意（有限维）右A-模M对应到按下述法则建立的左A-模M^*，M^*的向量空间取作M的线性函数空间（对偶空间$\mathrm{Hom}(M,K)$），而A在M^*上的算子作用按公式$(af)m=f(ma)$定义，此处$\forall a\in A$，$f\in M^*$，$m\in M$。易验，这时M^*成为左-A模。

类似地，如果M是左A-模，则共轭空间M^*成为右A-模。

任意线性映射φ：$M\to N$引出一个共轭映射φ^*：$N^*\to M^*$，它的定义是：

$$(\varphi^* f)m=f(\varphi m).$$

不难看出，如果φ是A-模同态，则φ^*也是A-模同态，

并且 $(\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*$，而 $1^* = 1$。

令模M对应于M^*，同态φ对应于φ^*，我们便得到了反变函子。（看第八章 § 1）。确切地说，是两个反变函子：一个从右A-模范畴 mod-A 到左 A-模范畴 A-mod，另一个相反。称它们为**对偶函子**。

我们知道，$M \to M^{**}$ 之间有一个自然映射 δ_M，将向量 $m \in M$对应到线性函数 $\delta(m)$：$M^* \to K$。这里 $\delta(m)$ 依法则 $\delta(m)f = f(m)$ 定义。显然，δ_M 确定了由恒等函子到对偶函子的合成的一个同态。从初等线性代数知，对任意有限维空间 M，δ_M 是同构。因此，我们的论证可以归结为下述定理。

定理1.1 这些对偶函子建立了 mod-A 与 $(A\text{-mod})^\circ$ 之间的等价性，特别地，这种函子是正合的，且从 $M^* = 0$ 可推出$M = 0$。

推论1.2 模M是单的，当且仅当模M^*是单的。在这种情况下，若$M \simeq e\bar{A}$，此处 $\bar{A} = A/\mathrm{rad}A$，且 e 是 $\bar{A}$的本原幂等元，则 $M^* \simeq \bar{A}e$。

证：因为$M \simeq M^{**}$，故只需说明若M不是单模，则 M^* 也不是单模。事实上，如果N是M的非平凡子模，则有正合序列：

$$0 \to N \to M \to M/N \to 0.$$

对这个列应用对偶函子，又可以得到一个正合序列：

$$0 \to (M/N)^* \to M^* \to N^* \to 0,$$

其中 $(M/N)^*$和N^*都是非 0 模，即M^*不是单的。

现设$M \simeq e\bar{A}$，此处 e 是本原幂等元。那么$Me \neq 0$，并可找到函数 $f \in M^*$，使 $f(Me) \neq 0$。但 $f(me) = (ef)(m)$。

意味着 $eM^{\bullet}\neq 0$，从而$M^{\bullet}\simeq \bar{A}e$。

推论1.3 在模M与$M^{\bullet}$的子模之间存在着一一对应，并使包含关系反向。

证明时只须注意到这样一点，任取子模$N\subset M$，均可定义一个满同态$\pi: M\to M/N$，从而有单同态 $\pi^{\bullet}$：$(M/N)^{\bullet}\to M^{\bullet}$，得到$M^{\bullet}$中的子模。这个子模有简单的含义：它重合于"正交补" $N^{\perp}=\{f\in M^{\bullet}, f(N)=0\}$。此外还有 $M^{\bullet}/N^{\perp}\simeq N^{\bullet}$。

我们列出下述显然成立的公式：

$$(N_1+N_2)^{\perp}=N_1^{\perp}\cap N_2^{\perp}, \quad (N_1\cap N_2)^{\perp}=N_1^{\perp}+N_2^{\perp} \tag{1}$$

满足公式（1）的对应叫作**格的反同构**。

下面常要用到这个子模：$(\mathrm{rad}M)^{\perp}\subset M^{\bullet}$。因为 $\mathrm{rad}M$ 是M的极大子模的交，故 $(\mathrm{rad}M)^{\perp}$ 是 $M^{\bullet}$的极小子模的和，称之为模$M^{\bullet}$的**基座**，记作 $\mathrm{soc}M^{\bullet}$。我们指出，模的基座可由下述公式定义。

$$\mathrm{soc}M=\{m\in M \mid m(\mathrm{rad}A)=0\}.$$

此外，从上面的说明可知，$\mathrm{soc}M^{\bullet}\simeq(M/\mathrm{rad}M)^{\bullet}$。

我们已经看到，在代数结构的研究中，投射模，特别是主模起了什么样的作用。因此，我们自然期望与之对偶的模在进一步的精细研究中也发挥好的作用。将有关投射模的已知定理"箭头逆转"（第三章定理3.5和第八章 § 2 例 4），可以自然地得到下述结果。

定理1.4 以下条件等价：

1）模$Q^{\bullet}$是投射的（换言之，$Q\simeq P^{\bullet}$，P是投射模）；

2）对某个自然数 n，Q 是模 nA^* 的直和项；（A^* 对偶于正则模．今后称之为**上正则模**）．

3）$Q\simeq\bigoplus_i k_iP_i^*$，此处 P_i 是主模；

4）带有行为正合序列的图

$$\begin{array}{ccc} 0\rightarrow & M & \xrightarrow{\varphi} N \\ & \psi\downarrow & \\ & Q & \end{array}$$

可以补足为交换图

$$\begin{array}{ccc} 0\longrightarrow & M & \xrightarrow{\varphi} N \\ & \psi\downarrow & \swarrow\bar{\varphi} \\ & Q & \end{array}$$

换言之，方程 $x\varphi=\psi$ 对任意 $\psi:M\rightarrow Q$ 和任意单同态 φ 有解；

5）任意单同态 $Q\rightarrow M$ 是分裂的，即在以 Q 为子模的任意模中，Q 是一个直和项．

具有定理 1.4 性质（4）的模叫作**内射模**．这样，定理 1.4 给出了有限维代数上的内射模的刻划．

从上述定理中特别得到，不可分解的内射模是与主模对偶的模．称之为**上主模**．

从推论1.3以及第三章中推论 2.5和 2.9，可以得到下述结果：

推论1.5 如果 Q 是上主模，则其基座是单模．将 Q 对应到单模 soc$Q$，可以建立上主 A- 模与单 A- 模之间的一一对应．

与投射复盖类似，可以引入**内射包**的概念，即以已知模M作为子模的最小内射模。确切地说，内射模Q是模M的内射包，若有单同态$\varphi: M \to Q$，使$\mathrm{Im}\varphi \supset \mathrm{soc}Q$，或对$Q$的任意子模$X$，从$\mathrm{Im}\varphi \cap X = 0$，有$X = 0$。这时，记$Q = Q(M)$。

内射包的存在及性质可借助于对偶性直接从投射复盖的类似定理得出。我们将所需事实叙述为如下定理，证明留给读者。

定理1.6 1）若P是M^*的投射复盖，则P^*是M的内射包。

2）$Q(M) = Q(\mathrm{soc}M)$。

3）$Q(M_1 \oplus M_2) \simeq Q(M_1) \oplus Q(M_2)$。

4）若ψ：$M \to Q'$是单同态，而Q'是内射模，则$Q' = Q \oplus Q_1$，其中$Q \simeq Q(M)$，且$\mathrm{Im}\psi \subset Q$。

推论1.7 若$\mathrm{soc}M$是单模，而对任意上主模Q_i，$l(M) \geqslant l(Q_i)$，则M也是上主模

证：若设$Q = Q(M)$，则$\mathrm{soc}Q \simeq \mathrm{soc}M$。所以$Q$是上主模。

注意到$l(Q_i) = l(Q_i^*)$，而Q_i^*是主A-模。所以右上主A-模的极大长度，重合于左主A-模的极大长度。（但一般来说，不重合于右主A-模的极大长度，看本章习题1）。

§ 2 删除预理

既是投射，又是内射的模叫作**双射模**。在本节中，我们研究双射模的性质。一般来说，一个代数A可能没有双射模（见本章习题2）。但若A的双射模存在，则可以把A-模

的研究归结为研究A的某个真商代数上的模。这一情况会给讨论某些代数类及其上的模带来好处。

首先建立下述简单但重要的事实。

命题2.1 若P是投射A-模，M是忠实A-模，则对某个自然数n，有$P\to nM$的单射存在。类似地，若Q是入射A-模，则有$mM\to Q$的满射存在。

证：记$E=E_A(M)$.将M看作左E-模，对某个自然数n,可以建立$nE\to M$的满射,利用左正合函子$\mathrm{Hom}_E(\cdot,M)$,我们得到了单同态φ：$\mathrm{Hom}_E(M,M)\to\mathrm{Hom}_E(nE,\ M)\simeq nM$。并且因为$M$是$E$-$A$-双模，知$\varphi$是$A$-模同态。如果我们把任意元素$a\in A$对应到映射$f(a)$：$M\to M$，它把$m$映到$ma$，则得到同态$f$：$A\to\mathrm{Hom}_E(M,\ M)$。显然，$\mathrm{Ker}f=\mathrm{Ann}M=0$,(因为$M$是忠实的)。乘积$\varphi f$是$A\to nM$的单同态。为了对任意投射模$P$得到同样的结论，只须回忆起$P$是某个自由模$kA$的子模（甚至是直和项），而令同态$kA\to knM=k(nM)$对每一个分量的作用与$\varphi f$一致，便最后得到了所需的单同态。

关于内射模的结论可从对偶性推出（因为M与M^*中之一是忠实的，则另一个也是）。

所得结果引出了下述基本预理。

预理2.2（删除预理） 设W是双射A-模，则存在非0理想$I\subset A$，使任意A-模M能够分解成直和$M_1\oplus M_2$，此处$\mathrm{Ann}M_1\supset I$，而模M_2的任意不可分解的直和项同构于模W的直和项。

证：显然只须验证，对任意不可分解的A-模M，若M不与W的直和项同构，则$\mathrm{Ann}M\supset I$。因此可将一切不可分

解的，且不与W的直和项同构的A-模（这样的模类记作$\mathscr{M}$）的零化子的交当作I，剩下要证明$I\neq 0$。

如若不然。因为代数A是有限维的，A中不存在子空间的无穷链。从而事实上$I=\bigcap_{i=1}^{t}\mathrm{Ann}M_i$，此处$M_1,\cdots,M_t$是$\mathscr{M}$当中的有限个模。这时显然有$I=\mathrm{Ann}M$，其中$M=M_1\oplus\cdots\oplus M_t$，即$M$是忠实$A$-模。由命题2.1，存在单同态$W\to nM$（$W$是投射模），但由于$W$也是内射模，从而$nM\simeq W\oplus X$，并由Krull-Шмидт定理知，$W$的任意不可分解的直和项同构于某个$Mi$，与所设矛盾，引理证毕。

如果$W=k_1W_1\oplus\cdots\oplus k_sW_s$，此处$W_i$是不可分解的模，则任意$A$-模形如$M_1\oplus l_1W_1\oplus\cdots\oplus l_sW_s$，此处$M_1$是商代数$A/I$上的模。这个商代数记作$A^-(W)$。当模$W$不可分解时（这样的模叫双主模），情况特别简单，从删除预理看到，此时任意A-模M形如$M\simeq M_1\oplus kW$，M_1是$A^-(W)$上的模。这时逆命题成立。

预理2.3 设W是不可分解的A-模，且使任意A-模M有形式$M_1\oplus kW$，此处M_1是A的某个真商代数B上的模，则W是双主模。

证：因为正则与上正则A-模是忠实的，所以不是B-模，从而它们应当含有同构于W的直和项。W同时为投射模和内射模。即为所证。

现在取定一个双主A-模W。我们来确定商代数$B=A^-(W)$上的主模及上主模的形式。

命题2.4 任意主B-模或是主A-模（不同于W），或是W对极小子模W_1（由推论1.5，W_1是唯一的）的商模。

任意上主B-模或是上主A-模，或是W的极大子模W_2，（由第三章推论2.5，W_2也是唯一的）．若W不是单模，则W/W_1是主B-模，而W_2是上主B-模．

证：显然，W/W_1是B-模．记$P=P_B(W/W_1)$．这时，$W\to W/W_1$的满同态可以延拓为满同态φ：$W\to P$，φ不是同构（因为W不是B-模）．所以$\mathrm{Ker}\varphi\supset W_1$，随之$l(P)\leqslant l(W/W_1)$，从而$P\simeq W/W_1$，类似地，$W_2\simeq Q_B(W_2)$．此处，$W/W_1$如同$W$一样，恰包含一个极大子模，所以不可分解．$W_2$仅包含一个极小子模，也不可分解．

现设P是任意主B-模，$P'=P_A(P)$．如果$P'\not\simeq W$，则P'是投射B-模，从而$P'\simeq P$．若$P'\simeq W$，则满同态$W\to P$不是同构，因而它可通过满同态$W/W_1\to P$，由之得$P\simeq W/W_1$．关于上主A-模的结论可利用对偶性去证明．

从命题2.4和预理2.2直接引出下述推论．

推论2.5 设W是双主A-模，并且$A=P_1\oplus P_2$，此处$P_1\simeq nW$而P_2不含与W同构的直和项．则$\mathrm{soc}P_1$是A的理想，且$A^-(W)=A/\mathrm{soc}P_1$．

命题2.6 代数A有单双射模W，当且仅当$A\simeq A_1\times A_2$，此处$A_1\simeq M_n(D)$（D是可除代数），而$A_2=A^-(W)$．

证：设W是单双射A-模，并且$A\simeq nW\oplus P$，其中P不含有与W同构的直和项．任意同态φ：$W\to P$或是零同态，或是单同态．在第二种情况下，因为W是内射模，故有$P\simeq W\oplus X$，而这是不可能的．因此$\mathrm{Hom}_A(nW,P)=0$．类似地，$\mathrm{Hom}_A(P,nW)=0$．所以$A\simeq A_1\times A_2$，此处$A=E_A(nW)\simeq M_n(D)$，且$D=E_A(W)$是可除代数，而$A_2=E_A(P)$．显然，$A_2=A^-(W)$．反面的结论是显然的．

§ 3 拟Frobenius代数

正如前面已指出过的，任意代数不一定有双射模. Nakayama提出了一类重要的代数，它们的一切投射模都是内射的（因此是双射的）. 显然，为此只须使正则模是内射模即可，这样的代数叫作**拟Frobenius代数**.

从原则上说应当分别定义左，右拟Frobenius代数. 但下述定理的成立省去了这一点.

定理3.1 下列条件等价：

1）右正则A-模是内射模；

1a）左正则A-模是内射模；

2）右上正则A-模是投射模；

2a）左上正则A-模是投射模.

证：等价关系1）$\Longleftrightarrow$2a）及1a）$\Longleftrightarrow$ 2）可由对偶性得出. 所以只须证明例如1)$\Longleftrightarrow$2)即可，首先我们来指出，右上主A-模的个数等于左主A-模的个数. 再据第三章推论2.9知，左主A-模的个数就是单左A-模的个数，换言之，是半单代数$A/\mathrm{rad}A$的单分量的个数. 但它也等于单右A-模或右主A-模的个数。正则模是内射的，这等价于说一切主A-模是内射的，即双主A-模的个数等于主A-模的个数. 考虑到上面的讨论，这就相当于双主模的个数等于上主模的个数，即任意上主模是投射的，这也就是说，上正则模是投射的. 定理证毕.

现在可将拟Frobenius代数刻划如下：如果$A\simeq k_1P_1\oplus\cdots\oplus k_sP_s$，此处$P_i$是主模，则$A^*\simeq l_1P_1\oplus\cdots\oplus l_sP_s$. 一般

说来，$k_i \neq l_i$（看第九章习题4），即$A \not\simeq A^*$。满足$A \simeq A^*$的代数组成了拟Frobenius代数类的真子类，称之为**Frobenius代数**。Frobenius代数的重要例子是有限群的群代数(看第九章习题8)。

定理3.1的证明引出了下述结果。

定理3.2 如果包含在正则A-模中的所有主A-模的重数相同，或同样地，$A/\mathrm{rad}\,A \simeq M_n(D_1) \times \cdots\cdots \times M_n(D_S)$，此处$D_i$是可除代数，则若$A$是拟Frobenius代数，$A$必是Frobenius代数。特别地，简约拟Frobenius代数是Frobenius的。

由于拟Frobenius性的定义是用模范畴的语言给出的，我们可得下述推论。

推论3.3 同型的代数必同时为拟Frobenius代数。特别地，一切拟Frobenius代数都与某Frobenius代数（即自身的基代数）同型。

从命题2.1和Krull-Шмидт定理还可以得到：

推论3.4 设A是拟Frobenius代数，$A \simeq k_1 P_1 \oplus \cdots \oplus k_S P_S$，此处$P_i$是主模，并设$M_0 = P_1 \oplus \cdots \oplus P_S$。则任意忠实$A$-模含有同构于$M_0$的直和项。

从命题2.6和代数的格式的定义得到，

推论3.5 设S是拟Frobenius代数A的格式。如果对点$i \in S$没有射线引出或没有射线进入，则$A \simeq A_1 \times A_2$，此处$A_1 \simeq M_n(D)$（D是可除代数）。

证明时只须注意到，若从点i不能引出射线，则对应的主模是单的（关于进入射线的论断可从对偶性得出）。

将推论3.5与关于继承代数的格式的结论相比较（第

三章推论7.3），我们又有：

推论3.6 拟Frobenius继承代数是半单的。

如果A是拟Frobenius代数，则任意主A-模P是上主模，并由推论1.5知，其基座是单A-模。进一步，若P'也是主模，不和P同构，则$\mathrm{soc}P' \not\simeq \mathrm{soc}P$。实际上，反面的论断亦成立，这就给出了拟Frobenius性的一个十分简单而方便的判断准则。

定理3.7 代数A是拟Frobenius的，当且仅当任意主A-模的基座是单模，并且若P_1和P_2是不同构的主A-模，则$\mathrm{soc}P_1 \not\simeq \mathrm{soc}P_2$。

证：由于定理的条件是用A-模范畴的语言叙述的，我们可以用与A同型的代数来代替A，并认为它是简约的。这时$A = P_1 \oplus \cdots \oplus P_s$，此处$P_i$是两两不同构的主模，记$Q_i = Q(P_i)$。由定理1.6知$\mathrm{soc}Q_i \simeq \mathrm{soc}P_i$是单模，并且当$i \neq j$时$\mathrm{soc}Q_i \not\simeq \mathrm{soc}Q_j$，从而$Q_i$是两两不同的上主$A$-模。这时$Q_i^*$是两两不同构的左主$A$-模，且因$A$是简约代数，有$A \simeq Q_1^* \oplus \cdots \oplus Q_s^*$（我们知道，左、右主模的个数相等）。还须证明$P_i \simeq Q_i$。已知$\dim P_i \leq \dim Q_i = \dim Q_i^*$，而

$$\sum_{i=1}^{s} \dim P_i = \dim A = \sum_{i=1}^{S} \dim Q_i^* = \sum_{i=1}^{S} \dim Q_i$$

所以$\dim P_i = \dim Q_i$对任意i成立。故有$P_i \simeq Q_i$。定理证毕。

现设A是Frobenius代数，由于$A \simeq A^*$，从推论1.3知，代数A的左、右理想的格反同构，我们将看到，这一论断对任意拟Frobenius代数亦成立、并且这个条件也可以作为拟Frobenius性的判断准则。

定理3.8 代数A是拟Frobenius代数，当且仅当A的左、右理想的格反同构。

证： 设φ是A中左理想格与右理想格的反同构，显然，$\varphi(A)=0$，$\varphi(0)=A$。将正则左A-模分解为主模的直和：$A=P_1\oplus P_2\oplus\cdots\oplus P_s$，这就意味着，$P_i$是$A$的左理想，$\sum_{i=1}^{s}P_i=A$，且$\forall_i$，$P_i\cap\left(\sum_{j\neq i}P_j\right)=0$。

利用格的反同构φ，可得A的右理想$\varphi(P_i)$，使

$$\bigcap_{i=1}^{s}\varphi(P_i)=0,\quad 且\ \forall_i,\varphi(P_i)+\left(\bigcap_{j\neq i}\varphi(P_j)\right)=A.$$

记 $P'_i=\bigcap_{j\neq i}\varphi(P_j)$。则$\forall_i$，$A=\varphi(P_i)\oplus P_i'$。对$k$作归纳，证明$k\leq n$时，

$$A=P'_1\oplus\cdots\oplus P'_k\oplus\left(\bigcap_{j=1}^{k}\varphi(P_j)\right).$$

归纳的基础$k=1$已证。设公式对任意$k<n$真。则由于$\bigcap_{j=1}^{k}\varphi(P_j)\supset P'_{k+1}$以及$A=P'_{k+1}\oplus\varphi(P_{k+1})$，

$\bigcap_{j=1}^{k}\varphi(P_j)=P'_{k+1}\oplus\left(\bigcap_{j=1}^{k+1}\varphi(P_j)\right)$，便得$k+1$时公式亦真，特别地，从$A=P'_1\oplus\cdots\oplus P'_s$知，一切$P'_i$都是右主模，此外，因$P'_i=A/\varphi(P_i)$，$P_i'$的子模的格同构于$A$中包有$\varphi(P_i)$的子模的格，即反同构于$P_i$的子模格（因$\varphi^{-1}(A)=0$），$P_i$包有唯一的极大子模，意味着$P_i'$包有唯一的极小子模，即$U_i=\mathrm{soc}P'_i$是单模。

鉴于定理3.7，为了证明代数A的拟Frobenius性，还须验证当$P'_i\not\simeq P'_j$时，$U_i\not\simeq U_j$。

我们指出，从$\varphi^{-1}(P_i')=\sum_{j\neq i}P_j$可得$P_i=\bigcap_{j\neq i}\varphi^{-1}(P_j')$，即$P_i$与$P_i'$之间的对应是对称的。

下面我们来证明，若$P_i\not\simeq P_j$，则$U_i\not\simeq U_j$，从而$P'_i\not\simeq P'_j$。由它显然还可推得，若$P'_j\not\simeq P'_i$，则$P_i\not\simeq P_j$，这就意味着$U_i\not\simeq U_j$。即为所证。

令$P=P_i+P_j$。则由$P_i\cap P_j=0$，有$P/P_i\simeq P_j$，而$P/P_j\simeq P_i$。因$P_i/\mathrm{rad}P_i\not\simeq P_j/\mathrm{rad}P_j$，$P$中恰有两个极大子模，一个包有$P_i$，另一个包有$P_j$。但$\varphi(P)=\varphi(P_i)\cap\varphi(P_j)$。意味着$P$的子模的格反同构于$A=\varphi(0)$中包有$\varphi(P_i)\cap\varphi(P_j)$的子模的格。由于$\varphi(P_i)+\varphi(P_j)=A$，$A/\varphi(P_i)\cap\varphi(P_j)\simeq A/\varphi(P_i)\oplus A/\varphi(P_j)\simeq P_i'\oplus P_j'$，于是在$P'_i\oplus P'_j$中恰有两个极小子模，当$U_i\simeq U_j$时，这是不可能的。(在这种情况下，$\forall a\in U_i$，$b\in U_j$，形如$a+b$的元素生成$U_i\oplus U_j$中的一个单子模，极小子模的个数至少是3。)*

现设A是拟Frobenius代数，则可如下具体地给出左、右A-理想格之间的一个反同构。这就是任取右理想I，令$l(I)=\{a\in A\,|\,aI=0\}$，任取左理想，J令$r(J)=\{b\in A\,|\,Jb=0\}$，显然，$l(I)$是左理想，而$r(J)$是右理想，并且从$I\supset I'$，($J\supset J'$)可推出$l(I)\subset l(I')$（相应地$r(J)\subset r(J')$）。我们要证明l和r互为逆映射，这样当然也就得到它们实现了所求的格反同构。

考察A-模的正合序列

---

*这里的元素a、b不能是任意的，取U_i到U_j上的一个同构对应φ，$a+\varphi(a)$生成单子模。——译者。

$$0 \to I \to A \to A/I \to 0.$$

将函子h_A作用其上并注意到A是内射模，可得正合序列

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(A/I, A) \to \mathrm{Hom}_A(A, A) \to \mathrm{Hom}_A(I, A) \to 0.$$

但任意同态$A/I \to A$都被$1+I$的像唯一确定，且这个像显然可取使$aI=0$的任意元素a. 换言之，$\mathrm{Hom}_A(A/I, A) \simeq l(I)$，我们的正合列可以改写成

$$0 \to l(I) \to A \to A/l(I) \to 0.$$

再一次应用函子h_A，并将$\mathrm{Hom}_A(A/l(I), A)$与$rl(I)$视为同一，得到正合列

$$0 \to rl(I) \to A \to A/rl(I) \to 0,$$

其中$rl(I) \simeq \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_A(I, A), A)$.

我们指出，存在唯一模同态η_M: $M \to \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_A(M, A), A)$，将元素$m \in M$送到同态$\bar{m}$: $\mathrm{Hom}_A(M, A) \to A$, $\bar{m}(f)=f(m)$, $\forall f \in \mathrm{Hom}_A(M, A)$. 显然，这种同态的全体作成函子$Id_{A\text{-mod}}$到函子$h_A^2$的自然同态（射元）. 特别得到带有正合行的交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & I & \to & A & \to & A/I & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & rl(I) & \to & A & \to & A/rl(I) & \to & 0 \end{array} \qquad (1)$$

其中位于中间的映射是同构.

今证对任意模M，映射η_M: $M \to \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_A(M, A), A)$是单射，为此将$M$嵌入内射模$Q$，并注意到，由于$A$的拟Frobenius性，$Q$是双射模. 因而是某个自由模的直和项. 也就是说，对某个自然数n，存在单射$M \to nA$. 这时任取非

0元素$m\in M$，显然可找到同态f：$M\to A$，使$f(m)\neq 0$。即$\bar{m}(f)=f(m)\neq 0$，$\bar{m}\neq 0$，我们的映射确实是单的。

最后指出，图（1）中两端的映射若为单射，则必为同构（例如从映射$I\to rl(I)$的单性推出其满性，因而也就有映射$A/I\to A/rl(I)$是同构的，再用一下五同态预理便得），定理全部证毕。

推论3.9 代数A是拟Frobenius的，当且仅当任取右理想I，$rl(I)=I$，而任取左理想J，$lr(J)=J$。

§4 单列代数(链代数)

如果A是拟Frobenius代数，则如前所述，A的表示可以归结为某些商代数B的表示。但是一般说来，代数B及其表示的构造可能是相当复杂的。如果我们假设A的一切商代数也是拟Frobenius的，则情况就本质地简化了，在这种情况下，模的描述归结为逐次去用推论3.4。

我们将看到，对满足此条件的代数本身可有比较简单的描述。此外，在这些代数中，任意理想都是主理想，即对某个元素$a\in A$，理想形如aA。反之，一切主理想代数具有这种性质。

我们把相应的论断叙述如下。

定理4.1 下述条件等价：

1）代数A的一切商代数都是拟Frobenius的；

2）代数A的任意理想都是主右理想（即形如aA）；

2a）代数A的任意理想是主左理想；

3）代数A的任意右理想是主理想；

3a）代数A的任意左理想是主理想；

4）$A \simeq A_1 \times \cdots \times A_S$，此处$A_i \simeq M_{n_i}(B_i)$，$B_i$是局部代数，且$\mathrm{rad}\,B_i$是主理想。

此外，如果代数A不能分解成直积，则上述条件还等价于这样的条件：

1a）代数A及其对任意极小理想的商代数是Frobenius的。

证：显然可以认为代数A是没有直积分解的。条件1）$\Rightarrow$1a），3）$\Rightarrow$2），3a）$\Rightarrow$2a）平凡。

1a）$\Rightarrow$4）设I是极小理想，而A与A/I是Frobenius代数。找出一个主A-模P（因而是双主的），不是A/I—模。这时显然有$A/I = A^{-}(P)$（参看预理2.2）。设$A \simeq nP \oplus P'$，P'不含有与P同构的直和项。将P的极大子模记作P_1，令$U_1 = \mathrm{soc}\,P$，$P_2 = P/U_1$。由命题2.4知，P_1是上主A/I-模，P_2是主A/I-模。由于A/I是拟Frobenius代数，所以P_1是主A/I-模。根据命题2.4或者$P_1 \simeq P_2$，或者P_1同构于P'的直和项。在后一种情况下，P_1就成为双射A-模，因而$P = P_1 \oplus X$，但这是不可能的。

于是$P_1 \simeq P_2$，这就意味着，P_2包有一个极小子模$U_2 \simeq \mathrm{soc}\,P_1 = U_1$，并且$P_2/U_2 \simeq P_1/U_1$，从而$P_2/U_2$也包有一极小子模$U_3$，同构于$U_2$，因而也同构于$U_1$。继续这个过程，我们便在$P$中建立了一个合成列，它的任意因子均与$U_1$同构。易见，这个合成列是唯一的，根据Jordan-Hölder定理特别得到$\mathrm{Hom}_A(P', P) = 0$。从对偶性知，$P^*$也是带有唯一合成列的主模，并且$\mathrm{Hom}_A(P, P') \simeq \mathrm{Hom}_A(P'^*, P^*) = 0$。从而$A \simeq A_1 \times A_2$，此处$A_1 = E_A(nP) \simeq M_n(B)$（$B = E_A(P)$

是局部代数），而$A_2=E_A(P')$.因为A不可分解，所以$P'=0$，$A\simeq A_1$。

记$R=\mathrm{rad}B$.则$\mathrm{rad}M_n(B)=M_n(R)$(第三章命题3.11)。但$\mathrm{rad}A=nP_1$，$P(P_1)\simeq P$，所以存在$A\to\mathrm{rad}A$的满同态。即$\mathrm{rad}A$，从而$\mathrm{rad}B$是循环模。

4) ⇒3)　设$A=M_n(B)$，且$R=\mathrm{rad}B$是主右理想。则有满同态φ：$B\to R$。这就意味着R^2是R的唯一极大子模。此外，$\varphi(R)=R^2$。于是$\varphi(R^2)=R^3$是R^2的唯一极大子模，等等，注意到这一点，我们便得B的任意右理想都是形如R^m。但$B\simeq E_A(P)$，此处P是主A-模。由Morita定理知，B中B-子模的格同构于$B\otimes_B P\simeq P$中A-子模的格，并且任取A-子模$M\subset P$，有满同态$P\to M$。通过对k作归纳，易见对任意子模$M\subset kP$，存在满同态$kP\to M$。特别地，任取右理想$I\subset A$，存在满同整$A\to I$，即I是主理想。

2)⇒1)　设$A\simeq nP\oplus P'$，P是主模，P'中没有与P同构的直和项。若$M_1=\mathrm{rad}P$，则$I_1=nM_1\oplus P'$是A的理想，这就意味着I_1是循环A-模。因此，存在满同态$A\to I_1$，从而推出存在满同态$P\to M_1$，M_1同样仅有一个极大子模M_2，且$M_1/M_2\simeq P/M_1$。这时$I_2=nM_2\oplus P'$也是理想，存在满同态$P\to M_2$。继续这一过程，我们得到了P的带有同构因子的唯一的合成列，同上可知$\mathrm{Hom}_A(P,P')=\mathrm{Hom}_A(P,'P)=0$，即$A\simeq A_1\times A_2$，由不可分解性知$P'=0$。因为$P$包有唯一极小子模，从定理3.7得到$A$是拟Frobenius代数。显然，条件2）可由$A$转移到$A$的任意商代数上。即$A$的一切商代数是拟Frobenius的。

从条件1）与1a）的对称性类似可得1a）⇒4）⇒3a)

$\Rightarrow 2a) \Rightarrow 1)$. 定理全部证毕.

满足定理4.1条件的代数叫作**单列代数**(或**主理想代数**).

从定理4.1和推论3.4直接得出下述推论.

推论4.2 单列代数上的任意不可分解模同构于主模的商模. 由对偶性知, 单列代数上的任意不可分解模亦同构于主模的子模.

在定理4.1的证明中, 我们同时得到了这样一个事实: 对于单列代数的主模, 存在着唯一的合成列, 因而给定长度的子模恰有一个. 从中可得下述推论.

推论4.3 单列代数上的不可分解模由其长度及投射复盖(或内射包)唯一确定(精确到同构).

从定理4.1易得如下一个代数是单列代数的判断准则.

命题4.4 代数A是单列的, 当且仅当A的格式是一些点和一些由一个点组成的圈构成, 并且不同点之间没有射线.

推论4.5 代数A与A/R^2, $R=\mathrm{rad}A$, 同是或同不是单列代数.

习　题

1. 设A是对应于偏序集



的极小代数（参看第三章习题8），找出这些主右A-模们和主左A-模们的长度，断定它们的极大值并不相等。

2．设三维代数A有基$\{1,a,b\}$及乘法表$a^2=b^2=ab=ba=0$，证明，A没有双射模。

3．设$A=T_n(K)$（上三角矩阵代数）。$W={}^nK$是域K上的n元数组空间，将它看作A-模，证明W是唯一的双射A-模，并找出$A^-(W)$。

4．考察格式S



的路代数$K(S)$。设J是非零长度的路组成的理想。$A=K(S)/J^2$，e_1,e_2是对应于点1和2的幂等元，$P_i=e_iA$，$P_i'=Ae_i$，证明：$P_1^*\simeq P_2'$，$P_2^*\simeq P_1'$，这样，A是Frobenius代数，若$P=P_1\oplus 2P_2$，则代数$B=E_A(P)$是拟Frobenius的，但不是Frobenius的。

5．证明，半单代数是Frobenius的。

6．证明，若A是Frobenius代数，则$M_n(A)$也是Frobenius的。

7．证明代数A是Frobenius的，当且仅当A上存在非退化双线性型T，并且是内双线性的（在第八章§3的意义下），即$\forall a,b,c\in A, T(ba,c)=T(b,ac)$。

8．设G是有限群，任取群代数KG的元素$a=\sum_g \alpha_g g$和$b=\sum_g \beta_g g$，定义$T(a,b)=\sum_g \alpha_{g^{-1}}\beta_g$。证明$T(a,b)$

是KG上的非退化内双线性型，从而KG是Frobenius代数。

9.证明，代数A是Frobenius的，当且仅当对任意右理想I和任意左理想J，有等式.

$$\dim I+\dim l(I)=[A:K], \dim J+\dim r(J)=[A:K].$$

（提示：先证明A是拟Frobenius的，然后考察理想$I=k(\mathrm{rad}P)\oplus X$，此处$A=kP\oplus X$，$P$是主模且不是$X$的直和项）.

10.证明，任取上三角矩阵代数$T_n(K)$上的右或左主模P，$\mathrm{soc}P$是单的（我们指出，从习题3知，这个代数不是拟Frobenius的）.

11.设D是可除代数，σ是它的自同构，无限维代数A由系数取自D的t的多项式组成，$\forall a\in D$，乘法由公式$ta=\sigma(a)t$定义，称之为**斜多项式代数**$A=D[t,\sigma]$.验证，$t^nA=At^n$，并验证A/t^nA是局部单列代数.

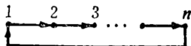
12.证明任意分离型（参看第8章§5）的局部单列代数形如A/t^nA. 此处$A=D[t,\sigma]$是上题建立的分离可除代数D上的斜多项式代数.并且D和指数n唯一确定的，而自同构σ精确到共轭（在自同构群中）和可除代数D的内自同构.

13.从习题12得出任意分离型的单列代数的刻划.

14.设$1=e_1+\cdots+e_n$是代数A的单位元的极小分解，$n\geqslant 3$，设e是所给分解式中三个不同的幂等元的和，若对任意这种幂等元e，代数eAe都是拟Frobenius的，则代数A本身是拟Frobenius的，（提示：设$P_i=e_iA$，且$\mathrm{soc}P_i$非单；则$P_i\supset U_j\oplus U_k$，此处U_j和U_k是单A-模，并且$P(U_j)\simeq P_j=e_jA, P(U_k)\simeq P_k=e_kA, i, j, k$不一定不同，把$P$当作$P_i, P_j, P_k$中两两相异的模的直和去证明，若$B=E_A(P)$，则主$B$-模的

基座$\overline{P_i}=\mathrm{Hom}_A(P,P_i)$不单，这与$B$的拟Frobenius性和定理3.7矛盾。类似地，若$P_i\simeq P_j$，则 soc $P_i\simeq \mathrm{soc}P_j\simeq U_k$，去证明，soc$\overline{P_i}\simeq$ soc $\overline{P_j}$，这又和定理3.7矛盾，因为从第八章定理4.4知：$\overline{P}_i\not\simeq\overline{P}_j$）

15．设$A=K(S)/J^2$，此处$K(S)$是格式S的路代数，S是圈（$n\geqslant 3$）



而J是由非零长度的路生成的理想，证明：代数A是拟Frobenius的，而代数eAe不是拟Frobenius的（此处$e=e_1+\cdots+e_k$($k<n$, e_i是对应于圈中第i个点的幂等元)（提示：在最后这种情况下，利用推论3.5）。这样，习题14中结论的逆命题不真。

16.设$1=e_1+\cdots+e_n$是代数A的单位元极小分解，$n\geqslant 2$，证明，若任取脚标i,j, $e=e_i+e_j$，使代数eAe成单列代数，则代数A也是单列的。

第十章　广义单列代数

第九章推论4.2和4.3给出了单列代数上的模的一个简单描述。不难看出，这一描述与其说利用了所有商代数的拟Frobenius性，不如说利用了每一个商代数的双射模的存在性。在本章中，我们研究更一般的代数类，即由Nakayama提出的广义单列代数。其特点是每一个商代数都有双射模。我们指出，这是使得第九章推论4.2和4.3的结论能成立的最广泛的代数类。广义单列代数的构造要比单列代数复杂得多，但是它们也可以在充分一般的前题下得到完全的刻划（此处的基本结果由Купиш得到）。

§1 Nakayama-Скорняков定理

设M是某个代数A上的右模或左模，模M称为**链模**，若其子模的格是一个**链**（即线性序集）。显然，这个条件相当于说，M的每一个非O子模N都有唯一的极大子模，它是模N的根。另一个等价条件是：对于M的任意非O子模N，$N/\mathrm{rad}N$是单模。

链模的直和叫做**半链模**。显然，单模都是链模，而半单模是半链模。从Krull-Шмидт定理知，半链模的任意直和项也是半链的。特别地，如果它还是不可分解，则为链模。

定理1.1 (Nakayama-Скорняков)　设A是一个代

数，则下述条件等价。

1）任意右A-模是半链模；

1a）任意左A-模是半链模；

2）正则右A-模和正则左A-模是半链模；

2a）正则和上正则右A-模是半链模；

2b）正则和上正则左A-模是半链模；

3）任意不可分解的A-模（右或左）同构于主模的商模；

3a）任意不可分解的A-模（右或左）同构于上主模的子模；

4）任意不可分解的A-模M（右或左）作为商代数$A/\mathrm{Ann}M$上的模是投射的；

4a）任意不可分解的A-模M（右或左）作为商代数$A/\mathrm{Ann}M$上的模是内射的；

5）代数A的每一个商代数有双射右模。

5a）代数A的每一个商代数有双射左模。

满足所给定理的等价条件的代数叫做**广义单列代数**

证明：条件1）$\Longleftrightarrow$ 1a），2）$\Longleftrightarrow$ 2a），3）$\Longleftrightarrow$3a），4）$\Longleftrightarrow$4a），5）$\Longleftrightarrow$5a）的等价性由对偶性得到（需要指出，任意模M，易验$\mathrm{Ann}M^* = \mathrm{Ann}M$）.

1）$\Longrightarrow$2a）和4）$\Longrightarrow$3）显然。

2）$\Longrightarrow$5）我们指出：条件2）在转化为商代数时保持不变：若$A = P_1 \oplus \cdots \oplus P_n$，此处$P_i$是链模，则$A/I = P_1/P_1I \oplus \cdots \oplus P_n/P_nI$.显然，商模$P_i/P_iI$也都是链模.因此，只要从条件2）推出代数$A$本身的双射模的存在性即可，此处用等价条件2$a$）代替条件2）更方便一些。

我们从主右A-模和上主右A-模中选出最大长度的模M。由于M是链模，它恰有一个极大和一个极小子模。这时从第三章推论2.8和第九章推论1.7得出，M既是主模又是上主模，即M是双射模。

5）$\Longrightarrow$ 4）　设M是不可分解的A-模。W是商代数$B=A/\mathrm{Ann}M$上的双射模，由于M是忠实不可分解的B-模，从删除预理（第九章预理2.2）立得，M同构于W的直和项。即B-模M是双射的，特别是投射的。

3）$\Longrightarrow$ 1）　设M是不可分解的A-模，因为M同构于主模的商模，所以在M中恰有一个极大子模$M_1=\mathrm{radM}$（第三章推论2.8）。另一方面，M（从而M_1）同构于上主模的子模，因此是不可分解的。用M_1代替M进行论证：$M_2=\mathrm{rad}M_1$是M_1中的唯一极大子模，并且M_2也不可分解，继续这个过程，可以得到M当中的一个子模链$M\supset M_1\supset M_2\supset M_3\supset\cdots$其中每一个后续子模都是前一个模中的唯一极大子模。显而易见，$M_1, M_2, M_3\cdots$是M当中的一切子模，即M是链模。定理证毕。

注：在条件2），3）和4）中，既对右模又对左模进行要求，这一点是很重要的：一个代数可以仅对右模（或左模）满足这些条件中的任意一个，但并非广义单列代数。我们举一个最简单的例子：M_3（K）当中由如下形式的矩阵：

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_5 \end{pmatrix} a_i\in K$$

组成的子代数A。如第五章习题1所证，这个代数不是广义

单列代数，但它对右模满足条件3）和4），且对左正则模满足条件2）。

由于广义单列代数上的主模的子模被自身的长度唯一确定，我们可得类似于第九章4.3的推论。

推论1.2 广义单列代数上的不可分解模由自身的长度和投射复盖（或内射包）唯一确定（精确到同构）。

由于广义单列性可以用模范畴的语言刻划（例如定理1.1的条件1）），易见同型的代数同时有或没有广义单列性。特别地，代数A是广义单列的，当且仅当其基代数是广义单列的。

定理1.1的条件2）表明，代数A是广义单列的，当且仅当主右A-模和主左A-模的任意子模包有唯一的极大子模，实际上，这一条件仅对主模的极大子模进行验证即可。即有

命题1.3 设任意主右（左）A-模的根含有唯一的极大子模，则一切主右（左）A-模是链模。

证明： 设P是任意主A-模，$M_1=\mathrm{rad}P$是其唯一极大子模，因为M_1包有唯一的极大子模$M_2=\mathrm{rad}M_1$，所以，M_1是某个主A-模P_1的商模（第三章推论2,8），而M_2是$\mathrm{rad}P_1$的商模，但$\mathrm{rad}P_1$同样是主A-模P_2的商模，从而M_2是P_2的商模，即包有唯一的极大子模$M_3=\mathrm{rad}M_2$。类似地，M_3是某个主A-模P_3的商模，等等，继续这个过程，我们得到了P的子模链$P\supset M_1\supset M_2\supset M_3\supset\cdots$，其中每一个后续模是前一个的唯一极大子模。显而易见，P的任意子模与某个M_i重合，故P是链模，

推论1.4 代数A与A/R^2，此处$R=\mathrm{rad}A$，同时具广义单列性。

为了证明只要指出，$\text{rad}P = PR$，$\text{rad}(\text{rad}P) = PR^2$，而依命题1.3，只需对任意主右模$P$（主左模$Q$）验证$PR/PR^2$（$RQ/R^2Q$）的单性。

从这个结果和第九章定理3.7可得下述推论。

推论1.5 若商代数A/R^2，此处$R = \text{rad}A$，是拟Frobenius的，则A是广义单列代数。

证明：设P是代数A/R^2上的主右模，若P不单，即$\text{rad}P \neq 0$，则其唯一极大子模$\text{rad}P$与基座重合（因为$(\text{rad}P)R = PR^2 = 0$），这时由第九章定理3.7知$\text{rad}P$单，这就意味着$P$是链模。类似地，任意左主$A/R^2$-模也是链模。所以$A/R^2$，从而$A$是广义单列代数。

注：正如三角矩阵代数的例子所示，反面的命题不真：若代数A是广义单列的，A/R^2不一定是拟Frobenius代数.

§2 右单列代数

我们来研究广义单列代数的结构。实际上，我们要讨论更广泛的一类代数，即**右单列代数**的结构，每一个右正则模是半链模的代数叫右单列代数。类似的描述，自然也适合于广义左单列代数，即其左正则模为半链模的代数。我们把对左单列代数的相应命题的叙述留给读者。

从命题1.3可得下述推论.

推论2.1 代数A与A/R^2同时成右单列代数。

证明：类似于推论1.4（不涉及左模）.

我们还知，右单列性可由代数的格式（看第三章§6）完全刻划。

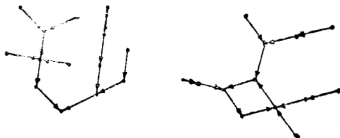
定理2.2 代数A是右单列代数，当且仅当，从格式$S(A)$的每一点，只能引出不超过一个射线。

证明：从命题1.3易见，右单列性等价于说，任取主右A-模P_i，其根$\mathrm{rad}P_i$或者是零，或者同构于主模P_j的商模。这就意味着，要么从格式$S(A)$的点i不能引出射线，要么恰能引出一条（到点j的）射线。

为了刻划右单列代数的格式，我们引入下述定义。两两不同的点集$\{i_1,\cdots,i_t\}$及射线集$\{\sigma_1,\cdots\cdots,\sigma_t\}$，其中每个射线$\sigma_h$从$i_k$到$i_{k+1}$，或从$i_{k+1}$到$i_k$，（认为$i_{t+1}=i_1$）组成的整体叫作格式$S$的一个**围道**。我们指出，$t$可以取1。当然，任意一个圈都是围道，但反面的命题一般不真。没有围道的连通格式叫作**树**，如果从格式S的某一个点不能引出射线，则称此点为S的**终端**。

推论2.3 不可分解为直积的代数A是右单列的，当且仅当$S(A)$是仅有一个终端的树，或者是仅有一个围道的格式，此围道是一个圈，并且如果从此格式中去掉此圈中的所有射线，则得到一些互不连通的树，它们的终端皆在该圈上。

下面是这样格式的例子：



证明：设A是右单列的，即从$S(A)$的每个点引出的射

线不超过一个.设点集$\{i_1,\cdots,i_t\}$与射线集$\{\sigma_1,\cdots,\sigma_t\}$是围道. 为确定起见，可设$\sigma_1$: $i_2\to i_1$，这时σ_2: $i_2\to i_3$是不可能的，这就意味着σ_2: $i_3\to i_2$. 类似地，σ_3: $i_4\to i_3$，…，σ_t: $i_1\to i_t$，即射线集$\{\sigma_t, \sigma_{t-1}, \cdots, \sigma_1\}$是圈. (如果$\sigma_1$: $i_1\to i_2$，则$\{\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_t\}$是圈)，特别地，如果在$S(A)$中没有圈，则$S(A)$是树. 设$S(A)$中有两个终端$i,j,i\neq j$. 分别用$S_1(S_2)$记格式$S(A)$中的这样的点集，从这些点引出有到点$i$（点$j$）的路. 这时，由于从每个点引出的射线不能超过一个，点集S_1和S_2的点之间不能有射线相连，故格式$S(A)$是不连通的. 即代数A可分解（第三章定理6.2）. 这就意味着$S(A)$中只有唯一的终端.

现设$\{\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_t\}$是格式$S(A)$中的一个圈. 显然可以认为所有的射线$\sigma_k$相异. 并且若$\sigma_k$: $i_k\to i_{k+1}(i_{t+1}=i_1)$，则所有的点$i_1,\cdots,i_t$也相异. 这时$\sigma_k$是唯一从点$i_k$引出的射线. 我们用$S_k$表$S(A)$中下列点的集合，从这些点引到点$i_k$的路不含有给定圈的任意射线（包括点$i_k$本身）. 并令$S_0=S/\bigcup_{k=1}^{t}S_k$，由于在$S(A)$中所有的围道是圈，集合$S_k$两两不交.

若点$i\in S_k(k>0)$，而σ是从点i到i_k的路中的第一个射线，则σ是从点i引出的唯一的射线，所以在S_k中不能再有圈，（也就没有围道）. 此外，所有从点$i\in S_k$引出的射线仍旧进入点$j\in S_k$.最后，从S_0的点同样不会有射线进入S_k的点（$k>0$）. 由S（A）的连通性知，$S_0=\phi$. 如果从$S(A)$中去掉所有的射线$\sigma_1,\cdots,\sigma_t$，则可得互不连通的格式S_k的并，每一个S_k均为带有唯一终端i_k的树.

反之，先设$S(A)$是带有唯一终端的树。我们证明从每个点i引出的射线不超过一个。事实上，如果σ和τ是从点i引出的两个射线，因为$S(A)$中没有圈，所以任意路的长度有界。我们来研究分别起始于射线σ和τ的两个最长的路φ与ψ. 这时，若φ：$i\to j$，而ψ：$i\to k$，则j和k是终端，从而$j=k$，但这是不可能的。因为在$S(A)$中没有围道。

现在设$\{\sigma_1,\cdots,\sigma_t\}$是格式$S(A)$中唯一的圈，并且去掉射线$\sigma_1,\cdots,\sigma_t$后，格式变为互不连通的树$S_k$，它们的终端是圈中的点$i_1,\cdots,i_t$。这时，$\sigma_k$是从$i_k$引出的唯一的射线。而若点$i$不在圈当中，如上所证，从这个点最多也只能引出一条射线，从而代数A是右单列的。定理证毕。

我们回忆一下，(B,V)称为代数A的型（第八章§5），此处$B=A/R, V=R/R^2$。从命题1.3得出下述推论。

推论2.4 设(B,V)是代数A的型. 代数A是右单列的，当且仅当任取极小幂等元$e\in B$，右B-模eV是单的（或是零）.

满足这一条件的B-双模V称为**右单列的.**

从推论2.4和第八章定理5.2立得下述结果。

定理2.5 分离型的任意右单列代数同构于张量积代数$T(V)$关于某一规则理想的商代数，此处V是建立在分离代数B上的右单列双模. 反之，任意这样的商代数都是右单列代数.

这样，为了描述分离型的右单列代数，只须指明张量积代数$T=T(V)$中的一切规则理想即可，其中V是半单代数B上的右单列双模.

设$1=e_1+\cdots+e_n$是代数B的单位元分解. 幂等元e_i是

原本幂等元，I是代数T的规则理想。记$T_i=e_iT$，$J_i=e_iJ$（此处J是代数T的基本理想，看第八章§5），$I_i=e_iI$。这时$I_i=T_iI$是T_i中的子模，并且I是规则理想，当且反当$T_iJ^2\supset I_i\supset T_iJ^m$对某个自然数$m$成立。即$l_i=l(T_i/I_i)<\infty$，且若$J_i\neq 0$（这等价于说$V_i=e_iV\neq 0$），则$l_i>2$。从定理2.5知，$T_i/T_iJ^m$是链模。这就意味着$l_i$唯一确定子模$I_i=T_iJ^{l_i}$。

反之，给出一些自然数l_i，可以建立右理想$I=\bigoplus_{i=1}^{n} I_i$，此处$I_i=T_iJ^{l_i}$。我们必须弄清，对$l_i$加以什么样的限制，以使这个理想是双边的。

首先要指出，若单B-模e_iB与e_jB同构，则e_i和e_j共轭：$e_j=ae_ia^{-1}$，a是B中的可逆元素。这时$aI_i=ae_iI=e_jaI=e_jI$由之可得$l_i=l(T_i/I_i)=l(T_j/I_j)=l_j$。换言之，对应$i\to l_i$定义了型$(B,V)$的格式$S$上的一个函数。

现设$e_iB\not\simeq e_jB$，并且在格式S中从e_i的对应点到e_j的对应点有一条射线，这就表明$V_i=e_iV\simeq e_jB$，这时因为$J=VT$，所以$T_iJ=e_iTJ=e_iVT=V_iT$，而$T_iJ^2=V_iTJ=V_iV_jT$。继续这个过程，得到

$$I_i=TJ^{l_i}=V_{i_1}V_{i_2}\cdots V_{i_l}T,\ l=l_i$$

此处：$\{i=i_1,i_2,\cdots,i_l\}$是唯一的一个脚标集，在此集中，格式S从点i_k到点i_{k+1}有射线相连（$k=1,\cdots,l-1$）。从而特别推出，$BI=I$，$VI\subset I$当且仅当任取到i有射线的点i_0，$V_{i_0},V_{i_1},\cdots,V_{i_l}\subset I$.但$V_{i_0}V_{i_1}\cdots V_{i_l}T\subset e_{i_0}T$。因此$V_{i_0}V_{i_1}\cdots V_{i_l}T\subset I_{i_0}\cdots V_{i_l}T\subset I_{i_0}=V_{i_0}V_{i_1}\cdots V_{i_m}T$，此处$m=l_{i_0}-1$相当于不等式$l\geqslant m$，即$l_i\geqslant l_{i_0}-1$

如果点i是格式S的终端，则显然$V_i=0$且必有$l_i=1$。最后总结成下述结果。

命题2.6 设B是半单代数，V是右单列B-双模，S是型(B,V)的格式。$T(V)$的真理想I被自然数l_i唯一确定。$\forall i\in S$，若i是终端，则$l_i=1$，若从点i到点j有一条射线，则$2\leq l_i\leq l_j+1$。

根据$T(V)$中规则理想的刻划不难得到分离型代数的完全分类。

定理2.7 分离型(B,V)的右单列代数A由对$S(A)$的每个点i所赋予的自然数l_i确定。这里l_i满足条件：若i是终端，则$l_i=1$，若从i到j有一条射线，则$2\leqslant l_i\leqslant l_j+1$。在这种情况下，集$\{B,V,l_1,\cdots,l_s\}$和$\{B',V',l'_1,\cdots,l'_s\}$决定同构的代数，当且仅当存在代数同构$\varphi$：$B\to B'$和$B$-双模同构[18] $f:V\to V'$，使$l'_{\sigma(i)}=l_i$，其中σ是由(φ,f)诱导出的型(B,V)的格式与(B',V')的格式间的同构。

证明：考虑到第八章定理5.2和命题2.6，我们仅验证判断同构的准则。设由集$\{B,V,l_1,\cdots,l_s\}$确定的代数A同构于由$\{B',V',l'_1,\cdots,l'_s\}$确定的代数$A'$。则同构$\psi$：$A\to A'$显然诱导出同构$\varphi$：$B\to B'$及$f$：$V\to V'$，这是因为$B=A/R$，$B'=A'/R'$，$V=R/R^2$以及$V'=R'/R'^2$，此处$R=\mathrm{rad}\,A$，$R'=\mathrm{rad}\,A'$。这时若$A=P_1\oplus\cdots\oplus P_n$，此处$P_i$是主$A$-模，则$A'=P'_1\oplus\cdots\oplus P'_n$其中$P'_i=\psi(P_i)$是主$A'$-模，并且$l(P_i)=l(P'_i)$。但若$i$是格式$S(A)$的点，则正如我们所看到的，数字$l_i$不是别的，恰是对应的主$A$-模的长度。从而$l'_{\sigma(i)}$

(18) $\forall v\in V'$，$b_1,b_2\in B$，若令$b_1vb_2=\varphi(b_1)v\varphi(b_2)$，则$V'$成为$B$-双模

$= l'_i$，此处σ：$S(A)\to S(A')$是由ψ或由（φ, f）诱导出来的格式的同构。

反之，若存在φ和f具备指出的性质，则由（φ, f）诱导出的同构$T(V)\to T(V')$把由集（$l_1, \cdots, l_S$)给出的理想I映成由($l'_1, \cdots l'_S$)给出的理想I'。这就意味着商代数$T(V)/I$与$T(V')/I'$同构。定理证毕。

如果代数A是可裂的（例如域K为代数闭域），则代数A的型由$S(A)$中的每一点i的“重数”n_i所决定，它对应着分解式$A/R\simeq\prod_{i=1}^{s} M_{n_i}(K)$。所以对这样的代数我们可得如下推论。

推论2.8 可裂右单列代数由集合$\{S; n_1, \cdots, n_S; l_1, \cdots l_S\}$完全确定，此处$S$是格式，其连通分量满足推论2.3所述的条件，$n_i$和$l_i(i\in S)$是自然数，并且若点$i$是终端，$l_i=1$，若从$i$到$j$有一条射线，则$2\leqslant l_i\leqslant l_{i+1}$。集$\{S; n_1, \cdots, n_S; l_1, \cdots, l_S\}$与$\{S'; n_1', \cdots, n'_S; l'_1, \cdots, l'_S\}$确定同构的代数，且仅当存在格同构$\sigma$：$S\to S'$，使得对任意点$i\in S$，有等式当$l'_{\sigma(i)}=l_i$和$n'_{\sigma(i)}=n_i$。

§3 广义单列代数的结构

因为广义单列代数也是右单列代数，所以上节的全部结果对它们都成立。只须明确一下格式的样子和这种代数可能具有的型。

定理3.1 设A是不可分解为直积的代数，（B, V）是它的型。并且$B=M_{n_1}(D_1)\times\cdots\times M_{n_s}(D_S)$，此处$D_i$是可除代

数．代数A是广义单列的，当且仅当S（A）或者是圈，或者是链．此外，$D_1\simeq D_2\simeq\cdots\simeq D_S$．

证明：利用推论2.4及其对左单列代数的类似结论，我们看到，A是广义单列代数，当且仅当任取本原幂等元$e\in B$，右B-模eV与左B-模Ve是单模．此外，显然可认为代数A是简约的．

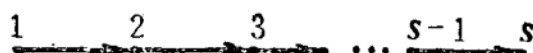
设$1=e_1+\cdots+e_S$是代数B的单位元的分解，且使$e_iB\simeq D_i$．格式$S=S(A)$具有从点j到点i的射线，当且仅当$V_{ji}=e_jVe_i\neq 0$．但若$V_{ji}\neq 0$且$V_{ki}\neq 0$，则左模Ve_i包有直和项V_{ji}和V_{ki}，从而不是单的．所以进入格式S的任意一个点i的射线不超过一个．由于定理2.2，从每个点引出的射线也不超过一个．故易见格式S或者是圈，或者是链．

现在S中任取点对i,j，使得从j到i有一条射线，这时$V_{ji}\neq 0$，从而$e_jV=V_{ji}=Ve_i$既是单右B-模也是单左B-模．由于$V_{ji}e_i\neq 0$，则得，作为右B-模，$V_{ji}\simeq D_i$．类似地，作为左B-模，$V_{ji}\simeq D_j$．于是我们建立了D_j-D_i-双模$U=V_{ji}$，它作为右D_i-模（左D_j-模）同构于D_i（D_j）．对于每一个元素$a\in D_j$，给出D_i-同态$U\to U$，将$u\in U$送到au，我们可得代数同态φ：$D_j\to E_{D_i}(U)\simeq D_i$．由于$D_j$是可除代数，所以$\varphi$是单的．又因为$[D_j:K]=[D_i:K]$，所以$\varphi$是同构，即$D_j\simeq D_i$．但若代数$A$不可分解，则格式$S$是连通的，这就意味着所有的可除代数$D_1,\cdots,D_S$之间彼此同构．

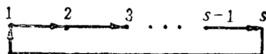
反之，设S是链或是圈，且$D_1\simeq D_2\simeq\cdots\simeq D_S$，由定理2.2，代数$A$是右单列代数．若$i$是格式$S$中的任意一点，则$Ve_i$或是等于0，或是重合于$V_{ji}$，其中$j$是到点$i$有一条射线相连的唯一的点．因为$A$是右单列代数，$V_{ji}$是单右$B$-模，

即$V_{ji} \simeq D_i$。另一方面，因为$e_jV_{ji}=V_{ji}$，则作为左B-模$V_{ji} \simeq mD_i$。但由于$[D_i:K]=[D_j:K]$，仅可能$m=1$。这时Ve_i是单左B-模，因而A是左单列代数。这样A即为广义单列代数，定理证毕。

从定理3.1和2.7易得分离型广义单列代数的完整描述。因为显然可以将讨论限制在不可分解的简约代数的范围之内，所以我们仅需刻划代数$B=D^s$（此处D是可除代数）上的双模V。它既是右单列又是左单列模。在这种情况下，型(B,V)的格式S是链。



或者是圈



记$V_i=e_iV$，此处e_i是代数B的极小幂等元对应于格式S的点i。这时，$V_i=Ve_{i-1}$，$i=1,\cdots,s-1$，在链的情况，$V_s=0$，在圈的情况，$V_s=Ve_1$。此外，V_i是一维D-双模，即V_i可由可除代数D的某个自同构σ_i给定（看第四章§1例3），可以认为，$V_i=D$，而$a\circ v\circ b=\sigma_i(a)vb$（此处左边是$D$-双模$V_i$的乘法，而右边是在可除代数$D$中的乘法）。考察代数$B$的自同构$\varphi$，它在除第$i$个分量之外的所有分量上恒同，而在第$i$个分量上诱导出可除代数$D$的自同构$\tau$。这时可在$V$上引出新的$B$-双模结构$V^{\varphi}$，令$a*v*b=\varphi(a)\circ v\circ\varphi(b)$。若$v\in V_j$，此处$j\neq i$，且$j\neq i-1$，则$a*v*b=a\circ v\circ b$。若

$v\in V_i$，则$a*v*b=\tau(a)\circ v\circ b=\sigma_i\tau(a)vb$。最后，若$v\in V_{i-1}$，则$a*v*b=a\circ v\circ\tau(b)=\sigma_{i-1}(a)v\tau(b)$。特别地，当$V=1$时，$a*1=\sigma_{i-1}(a)=1*\tau^{-1}\sigma_{i-1}(a)$，所以对应于双模$V^\varphi$的第$i$个分量的同构是$\sigma_i\tau$，而第$(i-1)$个分量的同构是$\tau^{-1}\sigma_{i-1}$。根据定理2.7，可以将对$(B,V)$换成$(B,V^\varphi)$（取恒等映射$V\to V^\varphi$作为那里的$f$）。

令$i=2$，$\tau=\sigma_1$，这样就把原来的自同构集（指上面对应于$V_i,i=1,2,\cdots,s$的D的自同构$\sigma_1,\cdots,\sigma_s$）换成一组新的自同构集，而此新集中的$\sigma_1=1$。然后，令$i=3$，$\tau=\sigma_2$，等等，这样逐次替换最后可得$\sigma_1=\cdots=\sigma_{s-1}=1$。如果$S$是圈，还剩下自同构$\sigma=\sigma_s$。对$S$的每一个点$i$，取同一个自同构$\tau$，应用这个构造方法，容易确信，我们将把集$\{1,\cdots,1,\sigma\}$换成为集$\{1,\cdots,1,\tau^{-1}\sigma\tau\}$。当然，同样的过程还可将$\{1,\cdots,1,\sigma\}$换成$\{1,\cdots,1,\sigma,1,\cdots,1\}$（$\sigma$在任意指定的位置）。

现在指出，若U是由D的自同构σ确定的一维D-双模，而W是由自同构τ给定的一维D-双模。则$U\otimes_D W$也是D-双模，并且若将U,W与D视为同一，则$a\circ(1\otimes1)=(a\circ1)\otimes1=\sigma(a)\otimes1=(1\circ\sigma(a))\otimes1=1\otimes(\sigma(a)\circ1)=1\otimes\tau(\sigma(a))=(1\otimes1)\circ\tau\sigma(a)$，即$U\otimes_D W$是由自同构$\tau\sigma$给定的双模。

从而得知，若B-双模V_i由自同构σ_i给出，则双模$\overline{V}=V_1\otimes_B V_2\otimes_B\cdots\otimes_B V_S$由自同构$\sigma=\sigma_s\cdots\sigma_2\sigma_1$给出。

现设格式S是圈，V'是由自同构集$\{\sigma'_1,\cdots,\sigma'_s\}$给出的$B$-双模，$\psi$：$B\to B$是代数$B$的自同构，而$f$：$V\to V'$是使$f(a\circ v\circ b)=\psi(a)\circ f(v)\circ\psi(b)$的同构，则显然$f(V_i)=V'_{k(i)}$，此处$k(i)$是数字$\{1,2,\cdots,s\}$的循环排列。如上设$\overline{V}=V_1\otimes_B V_2\otimes_B\cdots\otimes_B V_s$。$\overline{V}'=V'_{k(1)}\otimes_B V'_{k(2)}\otimes_B\cdots\otimes_B V'_{k(s)}$，则$f$

诱导出映射$\bar{f}$: $\bar{V}\to\bar{V}'$，使$(\bar{f}a\circ\bar{v}\circ b)=\psi(a)\circ\bar{f}(\bar{v})\circ\psi(b)$，用$\tau$表可除代数$D$的自同构，它与$\psi$在代数$B$的第一个分量上的限制重合，且将元素$1\otimes1\otimes\cdots\otimes1$当作$\bar{v}$，得到

$\bar{f}(a\circ\bar{v})=\tau(a)\circ\bar{f}(\bar{v})=\bar{f}(\bar{v}\circ\sigma(a))=\bar{f}(\bar{v})\circ\tau\bar{\sigma}(a)$，将$\bar{f}(\bar{v})$当作一维$D$-双模$\bar{V}$的基元，我们看到，$\bar{V}'$是由自同构$\tau\bar{\sigma}\tau^{-1}$给出的双模。但另一方面，$\bar{V}'$由自同构$\bar{\sigma}'=\sigma_{k(s)}\cdots\sigma'_{k(2)}\sigma'_{k(1)}$给出，从而$\tau\bar{\sigma}\tau^{-1}$与$\bar{\sigma}'$仅相差可除代数$D$的一个内自同构（参看第四章§1例3）。

考虑到V总可以认为由集合$\{1,\cdots,1,\sigma\}$给出，即得分离型广义单列代数的一个完全分类。

定理3.2 不可直积分解的分离型广义单列代数由集$\{S,D,\sigma;n_1,\cdots,n_s;l_1,\cdots,l_s\}$确定。此处$S$是格式，或为链，或为圈。$D$是分离可除代数。$\sigma$是可除代数$D$的自同构.（若$S$是链，则$\sigma=1$）；$n_i$和$l_i$是自然数，若$S$是链，当$i=1,\cdots,s-1$时，$2\leqslant l_i\leqslant l_{i+1}+1$而$l_s=1$。若$S$是圈，则$2\leqslant l_s\leqslant l_1+1$。并且可除代数$D$在同构意义下唯一确定，自同构$\sigma$精确到共轭和内自同构。若$S$是链，数组$\{n_1,\cdots,n_s\}$和$\{l_1,\cdots,l_s\}$唯一确定。若$S$是圈，它们精确到同样的循环置换。

我们还要指出，对简约广义单列代数的一个判断准则，它类似于把单列代数刻划成为主理想代数。

定理3.3 A是简约广义单列代数，当且仅当其根R是主左和主右理想。

证明：显然可设A是不可分解的，若A是广义单列的，则A的格式或是链，或是圈，主左A-模$P_1,\cdots,P_s$可以这样编号，$P(P_iR)\simeq P_{i+1}$，$i=1,\cdots,s-1$，$P_sR=0$或

$P(P_SR)\simeq P_1$.但这时$P(R)\simeq \bigoplus_{i=1}^{s} P(P_iR)$与$A$的直和项同构，随之$R$是主右理想．类似地，$R$是主左理想．

反之，设R是主右和主左理想，有满同态$A\to R$存在，从而$P(R)$是A的直和项，即每一个主右模P_i出现在$P(R)$中不超过一次，设$1=e_1+\cdots+e_s$是单位元素的一个分解，使$P_i\simeq e_iA$.$V=R/R^2$且$V_{ij}=e_iVe_j$．回忆起$P=P(R)\simeq P(V)$且P_i在P中出现多少次，单A-模$U_i=P_i/P_iR$就在V中出现多少次（第三章定理3.7）．因此，使$V_{ji}\neq 0$的脚标j不超过一个，并且这时$V_{ji}\simeq U_i$．与此类似，由于R是主左理想，从而对任意脚标i，使$V_{ij}\neq 0$的脚标j不超过一个，并且在这种情况下，V_{ij}是单左A-模．

现在证明，从格式$S(A)$的每一点i，引出的射线不能多于一个，事实上，从i引出两条射线分别进入j和k是不可能的，因为如果这样，就有$V_{ij}\neq 0$和$V_{ik}\neq 0$，如果从i到j至少有两条射线，则在V_{ij}中，模U_j至少出现两次，这也是不可能的，从而代数A是右单列的．类似地，A是左单列的，即为广义单列代数．

§4 拟Frobenius和继承右单列代数

如果拟Frobenius代数A是右单列的，即任一主右A-模都是链模，则由于主左A-模是上主模即与主右A-模对偶，因此它们也是链模，即A是广义单列代数．换言之，对拟Frobenius代数而言，右单列性，左单列性和广义单列性是一致的．下述定理给出了广义单列代数的拟Frobenius性的

判断准则。

定理4.1 设A是不可分解的广义单列代数，A是拟Frobenius的，当且仅当$S(A)$是圈，而任意主右A-模的长度相等。

证明：设A是拟Frobenius的，因为A不可分解，从第九章推论3.5知，在$S(A)$中没有终端。这意味着$S(A)$是圈。此外，若φ：$P_j \to R_i$是主A-模P_j到主A-模P_i的根R_i上的满同态，则φ不是单射（不然的话，作为内射A-模，P_j将是P_i的一个直和项，而这是不可能的）。所以，$l_j = l(P_j) > l(R_i) = l(P_i) - 1$，或$l_j \geqslant l_i$。考虑到$S(A)$是圈，所以$l_1 \leqslant l_2 \leqslant \cdots \leqslant l_s \leqslant l_1$，即全部$l_i$相等。

反之，设$S(A)$是圈，且$l_1 = \cdots = l_s = l$。设$P = P_i$是主右A-模。M_k是其唯一使$l(P/M_k) = k$的子模，(显然，$M_k = PR^k$，此处，$R = \text{rad}A$)。为方便起见，我们记$P_{S+1} = P_1$，$P_{S+2} = P_2$，等等。这时$P(M_1) \simeq P_{i+1}$，这就意味着M_2是R_{i+1}的满同态像。所以$P(M_2) \simeq P_{i+2}$等等。一般来说，$P(M_k) \simeq P_{i+k}$（只要$M_k \neq 0$）。特别地，$\text{soc}P = M_{e-1}$，从而$P(\text{soc}P_i) = P_{i+p-1}$。显然，在不同的$i = 1, \cdots, s$之下，模$P_{i+l-1}$彼此不同构。换言之，任取主右$A$-模$P_i$，其基座是单模，且当$P_i \not\simeq P_j$时，$\text{soc}P_i \not\simeq \text{soc}P_j$。由第九章定理3.7，$A$是拟Frobenius代数。定理证毕。

推论4.2 分离型不可分解的广义单列拟Forbenius代数A由集合$\{s, D, \sigma, l; n_1, \cdots, n_S\}$确定，此处$D$是分离可除代数，$\sigma$是$D$的自同构，$s$，$l$，$n_1$，$\cdots$，$n_S$是自然数。并且$D$在同构意义下唯一确定，$\sigma$精确到自共轭和内自同构，$\{n_1, \cdots, n_S\}$精确到循环置换。（圈$S$（$A$）的点数$s$和主$A$-模

的长度i都是唯一确定的。）

转入对继承右单列代数的研究．首先指出，根据第三章推论7.3，在这种代数的格式S中没有圈．从推论 2.3 知，S是互不连通的若干个带有唯一终端的树的并．对分离型代数可从第八章定理5.4和2.5得到完全的刻划：这样的代数同构于$T(V)$，此处V是分离代数B上的右单列双模，在型(B,V)的格式中没有圈．然而这一论断在去掉分离性假设之下仍保持其正确性，这可由下述结果得出．

定理4.3 设A是有限维代数，$R=\mathrm{rad}A$, $S=S(A)$, $B=A/R$, $V=R/R^2$．假设对格式S中的任意射线φ: $i\to j$，不存在i到j的长度大于等于 2 的路σ（特别地，在S中没有圈），则A同构于B-模V的张量代数$T(V)$对某一规则理想的商代数．

证明：类似于第八章定理5.2的证明，我们只需验证，在A中含有子代数$\bar{A}\simeq B$，而在R中含有B-子模$\bar{R}$，使$R=\bar{R}\oplus R^2$．

用P_1, …, P_s记不同的主A-模，$R_i=\mathrm{rad}P_i$, $R_{ij}=\mathrm{Hom}_A(P_j,P_i)$．若$f$: $P\to P_i$是同态而非同构，则$\mathrm{Im}f\subset R_i$，从而$f=\psi g$，此处ψ: $P(R_i)\to R_i$是满同态，g是$P_i\to P(R_i)$的某个同态．因为在S中没有圈，若P_j是$P(R_i)$的直和项，则$j\neq i$，且从点j到点i不能有路．这时根据第三章预理 6.1，$R_{ji}=0$，从而$g=0$，随之也有$f=0$．所以$E_A(P_i)=D_i$是可除代数，设$A\simeq n_1P_1\oplus\cdots\oplus n_sP_s$，将第三章定理5.2应用于

环$A\simeq E_A(A)$，我们看到$R=\bigoplus_{i\neq j}R_{ij}$，而 $B=A/R\simeq$

$\prod_{i=1}^{s} M_{n_i}(D_i)$，并且$A\supset\bar{A}\simeq B$。

设从i到j有一条射线，则从i到j的一切路只有这一条射线。由第三章定理6.1知，$R_{ij}\simeq V_{ij}=e_iVe_j$，此处$e_i$和$e_j$是使$e_iA\simeq P_i, e_jA\simeq P_j$的幂等元。记$\bar{R}=\bigoplus_{i\to j} R_{ij}$（取从$i$到$j$有射线的对$(i,j)$作为被加项），我们得到了$R$的子模$\bar{R}$，满足$\bar{R}=\bar{R}\oplus R^2$。定理证毕。

推论4.4 右单列继承代数同构于$T(V)$，此处V是半单代数B上的双模，且使型(B,V)的格式是互不连通的若干个带有唯一终端的树的并。

推论4.5 继承广义单列代数同型于一些可除代数上的上三角矩阵代数的直积。

证明： 显然只须验证，不可分解的简约广义单列继承代数同构于某一可除代数上的上三角矩阵代数。由定理3.2和推论4.4知，这样的代数同构于$T(V)$，此处V是代数$B=D\times\cdots\times D=D^s$（$D$是可除代数）上的双模，并且当$j\neq i+1$时，$V_{ij}=e_iVe_j=0$，而$V_{i(i+1)}$是正则$D$-双模（此处$1=e_1+\cdots+e_s$是代数$B$的单位元的极小分解）。用$e_{i(i+1)}$表$V_{i(i+1)}$中与$D$的一切元素$a$可交换者，即满足$ae_{i(i+1)}=e_{i(i+1)}a$的元素。

计算$V^{\otimes 2}$，显然，当$j\neq i+1$时，$V_{i(i+1)}\otimes_B V_{j(i+1)}=0$。同时，$V_{i(i+1)}\otimes_B V_{(i+1)(i+2)}\simeq D\otimes_D D\simeq D$，且此模的基底是元素$e\otimes_{i(i+2)}=e_{i(i+1)}\otimes e_{(i+1)(i+2)}$。类似地，建立元素$e_{i(i+3)}=e_{i(i+2)}\otimes e_{(i+2)(i+3)}$以及所有的元素$e_{ij}$，此处$s\geqslant j>i$。我们指出，$V^{\otimes s}=0$。因为在型$(B,V)$的格式中没有长度是$s$的路，所以代数$T(V)$的任意元素可唯一地表作形式

$\sum_{1\leq i<j\leq S} a_{ij}e_{ij}=\sum_{i,j} e_{ij}a_{ij}$此处$a_{ij}\in D$。因为$j\neq k$时，$e_{ij}e_{kl}=0$，且$e_{ij}e_{jl}=e_{il}$，则令该元素与下述形式的矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{ss} \end{pmatrix}$$

相对应，我们便得同构$T(V)\simeq T_S(D)$。定理证毕。

从$T(V)$的上述算法和定理4.3可得下述推论。

推论4.6 设A是不可分解的广义单列代数，其格式为链，则A同型于$T_S(D)$的商代数，此处D是可除代数。

习　　题

1．设$A\subset M_3(K)$为由下述形式的矩阵组成的子代数：

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_5 \end{pmatrix} \quad a_i\in K \qquad i=1,2,3,4,5$$

a）验证左正则A-模是半链模，而右正则A-模不是半链模。

b）设M是右A-模，e_{ii}是矩阵单位，$M_i=Me_{ii}$，验证，用$e_{12}(e_{13})$去乘，定义一个线性映射$L_2: M_1\to M_2$（$L_3: M_1\to M_3$）。反之，设M_1，M_2，M_3是三个向量空间，L_2：$M_1\to M_2$和L_3：$M_1\to M_3$是线性映射，令$M=M_1\oplus M_2\oplus M_3$，并按下述公式定义其元素对代数的基元素的乘法：

$$(m_1, m_2, m_3)e_{11} = (m_1, 0, 0);$$

$$(m_1, m_2, m_3)e_{22} = (0, m_2, 0);$$

$$(m_1, m_2, m_3)e_{33} = (0, 0, m_3);$$

$$(m_1, m_2, m_3)e_{12} = (0, m_1L_2, 0);$$

$$(m_1, m_2, m_3)e_{13} = (0, 0, m_1L_3).$$

验证，M在这样乘法下成为A-模，并且若N是根据映射L'_2和L'_3建立的另一个A-模，则$M \simeq N$，当且仅当存在向量空间M_i的自同构$\varphi_i (i=1,2,3)$，使$L'_i = \varphi_1 L_i \varphi_i (i=2,3)$。

c）运用练习b)中指出的构造，计算所有的不可分解A-模，并验证它们满足定理1.1的条件（3）和（4）。

d）验证rad$A$是主右理想，但不是主左理想。

2．考察$M_2(C)$中由下述矩阵组成的子代数A：

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_3 \end{pmatrix}, \ a_1 \in R, \ a_2, a_3 \in C,$$

证明A是右单列代数，但不是左单列代数，并且$S(A)$是链，而rad$A$是主右理想。

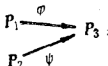
3．设$A = T_2(K)$（上三角矩阵代数），$P_i = e_{ii}A$（e_{ii}是矩阵单位），$P = 2P_1 \oplus P_2$，$B = E_A(P)$。证明B是广义单列代数，但rad$B$不是主右理想。

4．证明若$R = \text{rad}A$是主右和主左理想，则代数A是广义单列的。（提示：设$A \simeq \bigoplus_{i=1}^{m} n_i P_i \simeq \bigoplus_{i=1}^{m} n_i P'_i$此处$P_i$（$P'_i$）是两两不同构的主右（主左）$A$-模，并且若$P_i \simeq e_i A$，

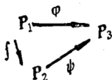
则$P'_i \simeq Ae_i$；$P(P_iR) = \bigoplus_{j=1}^{m} t_{ij} P_j$；$P(RP'_i) = \bigoplus_{j=1}^{m} t'_{ij} P'_j$。

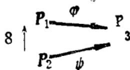
从第三章习题5知，任取j，$\sum_{i=1}^{m} t_{ij}n_i \leqslant n_j$，且$\sum_{i=1}^{m} t'_{ij}n_i \leqslant n_j$。利用这一点，从$t_{ij}=0$可得$t'_{ji}=0$，且反过来也是。再从这些不等式引出，对任意$i$都有$\sum_{j=1}^{m} t_{ij} \leqslant 1$及$\sum_{j=1}^{m} t'_{ij} \leqslant 1$）。反面的论断从习题3知不真。

5．证明代数A是右单列的，当且仅当任意下述图形



此处P_1, P_2, P_3，是主A-模（不一定相异），可补充成下述两个换交图形之一：





6．设$1=e_1+e_2+\cdots+e_n$是代数A的单位元的极小分解（$n\geqslant 3$），证明代数A是右单列的（广义单列的），当且仅当对任意的三个脚标i, j, k，令$e=e_i+e_j+e_k$，则代数eAe是右单列的（广义单列的）。（提示：利用第八章定理4.4和上面的习题。）

7．对右单列继承代数叙述与上面习题的结果相类似的定理，并证明之。

8．设$B=D^s$，此处D是有限维可除代数，$1=e_1+\cdots+e_s$是代数B的单位元的极小分解，V是一个B-模，使得除$(i,i+1)$和$(s,1)$之外，任取对(i,j)，都有$V_{ij}=e_iVe_j=0$，$V_{i(i+1)}$是正则D-双模，而V_{s1}是D-双模，它由可除代数D的自同构σ所确定。证明张量代数$T(V)$同构于下述形式的矩阵代数：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ ta_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ ta_{31} & ta_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ta_{n1} & ta_{n2} & ta_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

此处a_{ij}是斜多项式环$D[t,\sigma]$的元素（参看第九章习题12）。其基本理想J由所有对角元a_{ii}都是t的倍式的矩阵组成。

9．从习题8引出分离型简约广义单列代数的刻划。为了还能得到非简约代数，需如何改变相应的矩阵代数的构造？

10．证明分离型(B,V)的拟Frobenius广义单列代数A同构于$T(V)/J^k$，此处J是B-模V的张量代数的基本理想。

参 考 文 献

1 .B.L.Van der Waerden ALGEBRA I , II ,Springer-Verlag 1959 (有中译本，曹锡华等译，科学出版社，1976)

2 .A.Weil,Basic number theory 3rd ed. Berlin, Springer-Verlag 1974

3 .N.Jacobson,Theory of rings,New York,1943

4 . N.Jacobson,Structure of rings,AMS Colloquim Publ,Vol.37 1956,1964

5 .P.Cohn,Free rings and their relations, Academic Press,London-New York,1971

6 .C.W.Curtis, I . Reiner, Representation Theory fo Finite Groups and Associative Algebras,New York-London: , Interscience, 1962

7 .J.Lambek,Lectures on rings and modules, Waltham: Blaisdell, 1966

8 .C.Faith, Algebra: Rings, Modules and Categories,Berlin-Heideberg-New York: Springer,Vol. I 1973, Vol. II 1976

9 .I.N.Herstein,Noncommutative Rings, Carus Monograph 15, 1968

10.M.Deuring, Algebren. Berlin, 1935

索　引

六画

七画

八画

九画

十画

十一画